

SERIE : A

N° D'ORDRE : 35

N° DE SÉRIE : 2

N° enregistrement C.N.R.S. : A. O. 8368

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE DE RENNES

U. E. R. de Mathématiques et Informatique

pour obtenir

Le grade de Docteur Ingénieur en Sciences Mathématiques

par

Raymond MARIE

Maintenance en univers stochastique

Modèle et Optimisation

Soutenue le 28 avril 1973 devant la Commission d'Examen

M. M. MÉTIVIER

Président

M. A. MIGNOT

M. J. PELLAUMAIL

Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553611_0022

SERIE : A

N° D'ORDRE : 35

N° DE SERIE : 2

N° enregistrement C.N.R.S. : A. O. 8368

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE DE RENNES

U. E. R. de Mathématiques et Informatique

pour obtenir

Le grade de Docteur Ingénieur en Sciences Mathématiques

par

Raymond MARIE

Maintenance en univers stochastique

Modèle et Optimisation

Soutenue le 28 avril 1973 devant la Commission d'Examen

M. M. MÉTIVIER

Président

M. A. MIGNOT

M. J. PELLAUMAIL

)
)

Examineurs

THÈSE

Présentée à

L'UNIVERSITE DE BRUXELLES

Par M. le Docteur en Médecine

M. le Docteur

Le Docteur en Médecine



Mémoire de M. le Docteur

sur le

Le Docteur en Médecine

M. M. MÉRISSE	Président
M. A. WILKIN	Examinateur
M. J. PELLERIN	Examinateur

UNIVERSITE DE RENNES

U.E.R. issues de la FACULTE DES SCIENCES

Doyens Honoraires

M. MILON Y.
M. TREHIN R.
M. SCHMITT M.
M. LE MOAL H.
M. MARTIN Y.
M. BOCLE J.

Professeurs Honoraires

M. FREYMAN R.
M. HAGENE P.
M. POISSON R.
M. ROHMER R.
M. TREHIN R.
M. SALMON-LEGAGNEUR F.
M. des ABBAYES H.
M. MILON Y.

Maîtres de Conférences Honoraires

M. GRILLET L.
M. LECRECO A.

Mathématiques

Professeurs

Melle CHARPENTIER M.
M. GUERINDON J.
M. METIVIER M.
M. GIORGIUTTI I.
M. BRUNEL A.
M. TOUGERON J. C.
M. MIGNOT A.

Maîtres de Conférences & Chargés de Cours

M. LEGOUPIL J.
M. HOUEBINE J.
M. EUVRARD D.
M. NEDELEC J. C.
M. VERJUS J. P.
M. TRILLING L.
M. FERRAND D.
M. GUIVARC'H Y.
M. KEANE M. (M. C. associé)
M. GILDELAMADRID (Prof. associé)

Physique

M. VACHER M.
M. VIGNERON L.
M. LE BOT J.
Mme ROBIN née SALOMOND
M. ROBIN S.
M. LE MONTAGNER S.
M. MEVEL J. Y.
M. MEINNEL J.
M. REGENSTREIF E.
M. BRUN P.
M. LE ROUX E.
M. DUBOST

M. GUIDINI
M. HAEUSLER C.
M. ARQUES P. Y.
M. DECAMPS E.
M. NUSIMOVICI M. A.

Chimie

M. VENE J.	M. GRANDJEAN D.
M. LE MOAL H.	M. LUCAS J.
M. LEVAS E.	M. DUVAL J.
M. PELTIER D.	M. MARTIN G.
M. PRIGENT J.	
M. JOUAN P.	
M. FOUCAUD A.	
M. LANG J.	
M. CARRIE R.	
M. GUERILLOT C.	
M. KERFANTO M.	
M. DABARD R.	

Zoologie

M. RICHARD G.	M. LEFEUVRE J.C.
M. MAILLET P.	
M. BOISTEL J.	
M. RAZET P.	
M. FOLLIOT R.	
M. ALLEGRET P.	
M. MANIEY J.	
M. JOLY J.	
M. POSTEL (Professeur associé)	

Botanique

M. VILLERET S.	Mme LEMOINE C.
M. CLAUSTRES G.	M. TOUFFET
Melle GOAS M.	
Melle GOAS G.	

Géologie

M. COGNE J.	M. BOILLLOT G.
Melle DURAND S.	M. HAMEURT J.
M. PHILIPPOT A.	

Le Secrétaire Général de l'Université

M. BOURDIGUEL R.

A ma femme,

Ce travail, commencé à la Faculté des Sciences d'Orléans, s'est par le jeu du hasard de la vie professionnelle, poursuivi à l'Université de Rennes.

J'exprime donc, tout d'abord, ma respectueuse gratitude à Monsieur le Doyen FRIC, de la Faculté des Sciences d'Orléans, pour avoir accepté de diriger la première phase de mes travaux.

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur le Professeur METIVIER, mon Directeur de Thèse, d'avoir repris la barre et guidé cette recherche à travers les écueils de la mathématique stochastique.

Si cette thèse repose sur des bases que j'espère réalistes, ce sera aussi grâce à de nombreux entretiens avec des spécialistes d'organismes scientifiques (I.R.I.A.) ou professionnels (C.N.E.T., S.E.F.T., S.M.A.T. THOMSON-C.S.F.) ; je remercierai entre autres : Madame LOBLIGEIS, Messieurs BENSOUSSAN, GOURSAT, MARECHAL, MARY, PLANTARD, ROUBERTIER, TASSIN, WOLF.

Messieurs MIGNOT et PELLAUMAIL ont accepté de faire partie du jury auquel cette thèse est présentée ; je les remercie vivement pour cette marque d'intérêt.

Enfin, je tiens à exprimer mes remerciements à tout le personnel qui a participé à la présentation matérielle de ce travail.

I - INTRODUCTION

I - 1 : "DE QUOI S'AGIT-IL ?" :

Tout nouvel investissement en matériel entraîne un investissement en maintenance. Le matériel étant généralement de plus en plus sophistiqué, la maintenance est plus lourde et son coût plus élevé.

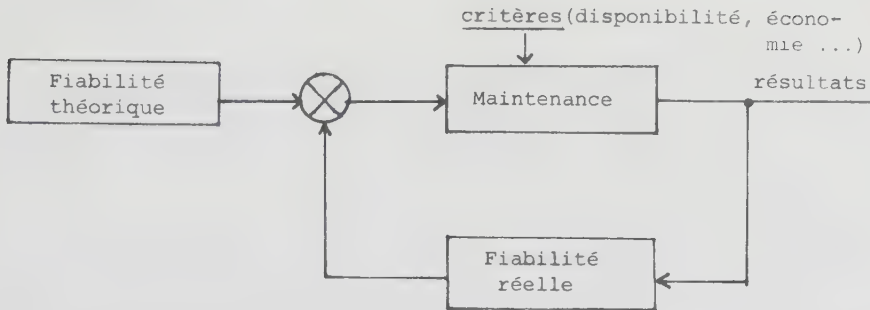
Du seul point de vue économique, il devient important de prévoir et maîtriser l'organisation de la maintenance (ateliers de réparations, stocks de rechanges) alors que les besoins ne sont encore que potentiels.

Vue sous l'angle de l'utilisateur, la maintenance devrait réaliser cette performance d'être à la fois la plus efficace et la plus économique ; qualités opposées mais également nécessaires. Ce dualisme mathématique insoluble nous a conduit à rechercher une formulation moins exigeante mais qui permet de définir une politique réalisable.

Peut-être le lecteur a-t-il déjà pensé que le problème initial est la recherche de la fiabilité prévisionnelle du matériel. En effet, grâce à la fiabilité théorique, nous disposons d'un outil mathématique pour comprendre les lois rigoureuses des pannes aléatoires. Associée à la notion de maintenabilité, la fiabilité contribuera, par la suite, à une meilleure organisation de la maintenance.

Remarquons que la fiabilité réelle d'un appareil ne sera connue que s'il est possible d'exploiter les résultats de la maintenance. Les calculs permettront alors de corriger la stratégie de celle-ci.

Ceci peut se représenter sous forme d'un schéma :



Le problème est donc d'étudier un modèle théorique, élaboré à l'aide des théories des probabilités, des statistiques et de la recherche opérationnelle devant s'adapter à la maintenance du matériel.

I - 2 : PRESENTATION DE L'ETUDE :

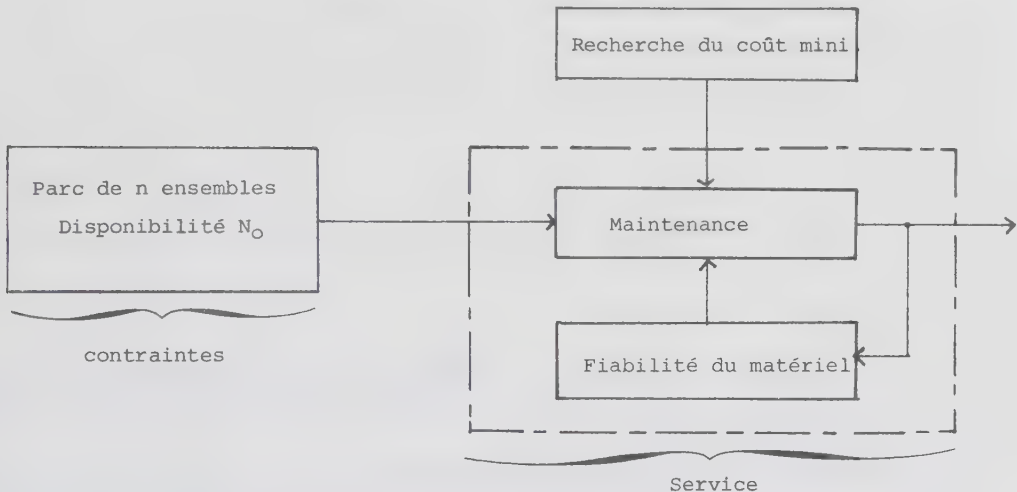
Différents ouvrages [21] (1) [22] traitent de la maintenance en univers stochastique, mais les auteurs y ont surtout étudié des systèmes de maintenance préventive. Il s'agit généralement d'optimiser des périodicités de visites (d'inspection) sachant que l'on connaît les lois de fiabilité des matériels et les probabilités de découverte des défauts partiels. A notre connaissance, les problèmes de maintenance corrective traités mathématiquement sont présentés sous forme de cas simples servant à illustrer la littérature sur les files d'attente. La particularité supposée de cette étude est donc de présenter un modèle de maintenance corrective plus élaboré où les principaux phénomènes de la réparation et du stockage des rechanges sont introduits selon une méthode propre à favoriser l'optimisation. Cette recherche est faite en considérant que le parc est constitué d'ensembles électroniques car c'est surtout ce matériel qui a fait l'objet de recherches en fiabilité prévisionnelle (et pour lequel on admet généralement que la loi est exponentielle) ; ce n'est qu'après avoir déterminé le modèle, qu'on montre com-

(1) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie consultée, en fin d'ouvrage.

ment le modèle de maintenance peut servir pour un matériel quelconque en régime stabilisé.

Dans cette étude, l'entreprise qui effectue la maintenance ne se confond pas nécessairement avec celle qui utilise le matériel ; la première se contente alors de louer ses services à la seconde.

L'utilisateur possède un parc de "n" ensembles et souhaite en avoir une disponibilité exprimée par la valeur probable des ensembles en bon état à un instant quelconque. Ce sont les contraintes imposées à l'Entreprise de service. Pour cette dernière l'optimum sera alors de satisfaire ces contraintes avec un coût minimal :



Mais avant d'entrer au coeur du problème, il semble bon de procéder à une description du phénomène général de maintenance, présentée sous forme schématique : la fin du chapitre I (introduction) est consacrée à cela.

Le chapitre 2 contient de brefs rappels sur les lois générales de la fiabilité, des phénomènes d'attente, ainsi que le développement de certains aspects particuliers utiles à notre travail.

Le chapitre 3 constitue la partie la plus importante de l'étude ; il y est présenté un modèle mathématique de maintenance et l'algorithme de

calcul d'une contrainte de disponibilité visant une solution de maintenance optimale.

On cherche à minimiser la fonction économique "Coût de la maintenance" sous la contrainte "Disponibilité moyenne du parc $> N_0$ ".

Le problème dual consisterait à maximiser une fonction économique "Disponibilité du parc" sous une contrainte "Coût de la maintenance $< C_M$ ".

Le chapitre 4 est consacré à la présentation d'exemples numériques complets.

Sous forme de compléments (paragraphe précédés de la lettre C) sont présentés les problèmes particuliers, ou les points de détail, ainsi que les calculs pouvant paraître fastidieux. Ces compléments, pour lesquels un trait figure en marge, peuvent ne pas faire l'objet d'une première lecture.

En annexe, (à la fin de l'ouvrage), figurent quelques extraits bibliographiques intervenant en justification au cours de l'étude.

I - 3 : DESCRIPTION DU SYSTEME GENERAL :

Avant de traiter mathématiquement le modèle de maintenance, il semble intéressant de décrire le phénomène général, de voir ce qu'il contient, ce qui l'entoure, afin de connaître et de définir les paramètres internes et externes dont il dépend.

I.3.1. Utilisation de la fiabilité théorique :

- Voir la planche P.1/I (1)

Ce schéma simplifié représente le processus du raisonnement de façon incomplète mais suffisante pour une introduction.

(1) Les planches sont rassemblées à la fin de l'ouvrage.

Chaque bloc est explicité en suivant un ordre logique : les calculs effectués au niveau d'un bloc permettent de faire ceux du suivant.

La maintenance débute (ou devrait débiter) par le calcul de la fiabilité théorique et de la maintenabilité théorique. Grâce aux différents taux de défaillance calculés (la maintenance n'étant pas encore en service, on ne pourra pas s'aider des résultats d'exploitation) et à l'estimation d'une durée théorique de réparation par opération (les opérations étant définies au préalable), on calculera une durée théorique moyenne de réparation.

On estimera aussi le "temps moyen de transport" nécessaire pour déplacer le matériel de chez l'utilisateur à l'atelier considéré, et vice versa.

C'est seulement alors qu'on devra déduire de façon rigoureuse (grâce au modèle mathématique du "processus stochastique de maintenance") le nombre de réparateurs et les stocks de façon à satisfaire la disponibilité demandée.

Par ailleurs on pourra définir les moyens de travail (outillage, documentation, ...) et former les réparateurs au matériel nouveau.

Tout est prêt désormais pour réaliser cette maintenance.

Tous les résultats qui précèdent ont été obtenus à partir des calculs de fiabilité théorique. Cela suppose qu'on a défini des conditions d'utilisation ; mais celles-ci ne seront peut-être pas celles de la réalité. On voit immédiatement l'intérêt d'utiliser les informations données par l'exécution des réparations.

I.3.2. Recherche de la fiabilité réelle :

C'est à ce stade qu'il faut concevoir une fiche de renseignements dont la texture est liée à l'exploitation qu'on veut en faire.

Toutes ces fiches seront stockées afin de suivre le matériel depuis sa naissance. On peut déjà signaler un problème : l'exploitation des résultats devra se faire sur des échantillons de populations homogènes.

De la décomposition des pannes (par âge, sous-ensembles, composants identiques, composants de même repère topologique, ...) on devra déduire des renseignements sur la fiabilité et notamment sur la valeur des taux de défaillance, qu'ils soient constants ou évolutifs.

On calculera aussi les durées moyennes de réparation à partir des durées de réparation constatées.

Tous ces résultats seront alors comparés aux valeurs théoriques pour effectuer les corrections nécessaires afin d'obtenir réellement la disponibilité souhaitée.

II - GENERALITES

II - 1 : FIABILITE :

II.1.1. Généralités :

Ce chapitre ne constitue qu'un bref rappel des lois générales de la fiabilité.

II.1.1.1. Introduction :

On considère en électronique deux formes de défaillance :

- la défaillance catalectique qu'on ne peut pas prévoir et qui provoque la disparition complète de la fonction électronique.
- la défaillance par dérive qu'on peut prévoir par un examen antérieur du matériel et qui consiste en une évolution des caractéristiques en dehors d'un intervalle de tolérance préalablement défini.

D'autre part, si on représente l'évolution temporelle du taux de défaillance d'un matériel électronique, on obtient la courbe bien connue (dite courbe en "baignoire") représentée à la figure II.1.1.1.

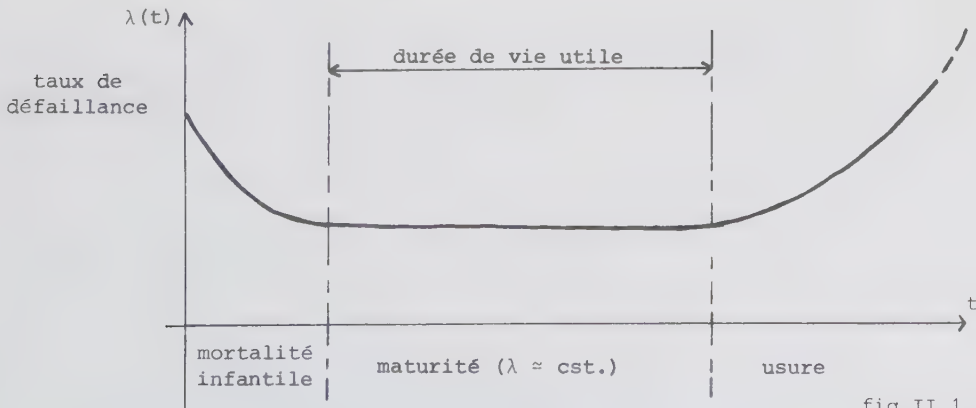


fig.II.1.1.1.

Ce qui conduit à distinguer les trois périodes ci-dessus.

II.1.1.2. Lois mathématiques :

II.1.1.2.1. Fonctions utilisées en fiabilité :

A) Fonction de fiabilité $R(t)$: probabilité de survie à l'instant t .

B) Fonction cumulative des défaillances : probabilité d'apparition d'un défaut au moins dans l'intervalle $[0, t]$

$$\text{D'où : } R(t) + F(t) = 1$$

C) Densité de probabilité de défaillance : $f(t) = \frac{d(F(t))}{dt}$

D) Taux de défaillance instantané $\lambda(t)$; ce taux est tel que " $\lambda(t).dt$ " soit la probabilité pour qu'un matériel survivant à l'instant t meure dans l'intervalle $]t, t+dt]$:

$$R(t+dt) = R(t) \cdot [1 - \lambda(t).dt]$$

$$\text{D'où } \lambda(t).dt = - \frac{dR(t)}{R(t)}$$

II.1.1.2.2. Modèles de lois de fiabilité utilisés pour du matériel électronique :

A) Loi exponentielle :

Durant la durée de vie utile, les défaillances sont catalectiques et le taux de défaillance instantané $\lambda(t)$ peut être considéré constant ; ce qui entraîne :

$$\lambda(t).dt = \lambda.dt = - \frac{dR(t)}{R(t)}$$

$$\implies \underline{R(t) = e^{-\lambda t}}$$

B) Loi normale :

La période d'usure d'un matériel possédant un seul mode de défaillance peut être représentée par la densité de probabili-

té de défaillance mise sous la forme d'une loi normale :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2}$$

C) Loi de Weibull :

C'est un modèle assez général :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-t_0}{\alpha}\right)^\beta}$$

où : t_0 = paramètre de position.

α = paramètre d'échelle.

β = paramètre de forme.

- pour $\beta < 1$, la loi de Weibull est hyperexponentielle et peut représenter la période infantile.

- la valeur $\beta = 1$ correspond à la loi exponentielle.

- avec des valeurs de $\beta > 1$, la loi de Weibull représentera des périodes de vieillesse (la loi normale équivant sensiblement à la loi de Weibull avec $\beta \approx 3,5$).

Il existe sur le marché, du papier dit "de Weibull" dont les échelles fonctionnelles permettent de représenter la distribution de Weibull sous forme d'une droite. En effet, en graduant l'échelle des abscisses sous la forme :

$$X = \ln(t-t_0)$$

et l'échelle des ordonnées :

$$Y = \ln \ln \frac{1}{1 - F(t)}$$

on obtient la droite représentative :

$$Y = \beta X - \ln \alpha$$

puisque :

$$\ln \ln \frac{1}{1 - F(t)} = \beta \ln(t - t_0) - \ln \alpha$$

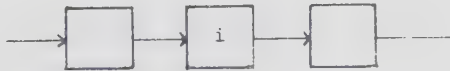
II.1.1.3. Fiabilité des systèmes :

L'algèbre des événements permet d'exprimer la fiabilité d'un système à partir de la fiabilité des éléments qui le composent.

II.1.1.3.1. Éléments en série :

Des éléments sont dits en série si la défaillance d'un seul élément entraîne la défaillance du système.

On représentera alors le système :

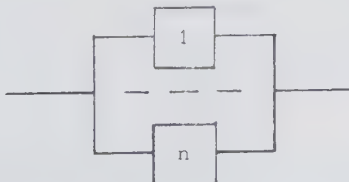


Si $R_i(t)$ est la fonction de fiabilité de l'élément i :

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$$

II.1.1.3.2. Éléments redondants :

Lorsque tous les éléments doivent être défaillants pour que le système le soit :



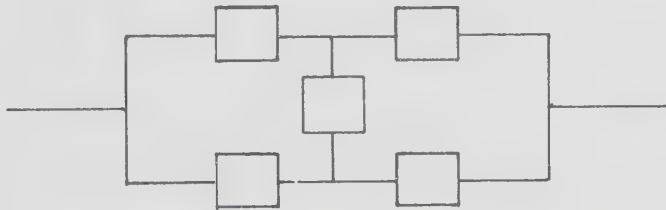
La fiabilité du système sera donnée par la relation :

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)).$$

Remarque : Souvent, de tels éléments sont dits "en parallèle", mais il ne faut pas confondre avec la mise d'éléments "en parallèle" au sens de l'électronicien.

II.1.1.3.3. Combinaison quelconque :

Exemple :



Là encore, l'algèbre des événements (et notamment le théorème de Bayes lorsque la mort d'un élément modifie les contraintes imposées aux autres éléments) permet d'exprimer la fiabilité d'un tel système, aussi complexe soit-il ; (la complexité du résultat découle de celle du système).

II.1.2. Etude des taux théoriques de défaillance :

La période de "durée de vie utile" correspond à la période où les défaillances catalectiques sont prépondérantes.

On peut alors considérer le taux de défaillance instantané $\lambda(t)$ comme constant au niveau de chaque élément. Ce qui veut dire que les défaillances catalectiques sont purement aléatoires et se produisent suivant un Processus de Poisson.

La fonction fiabilité de chacun des éléments du système

électronique peut alors s'exprimer sous la forme d'une loi exponentielle :

$$R_i(t) = e^{-\lambda_i \cdot t}$$

Si le système électronique ne comprend aucune redondance, tous les éléments sont en série au sens de la fiabilité. Celle-ci s'exprime aussi sous la forme d'une loi exponentielle :

$$R(t) = e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_{n-1} \cdot t} \cdot e^{-\lambda_n \cdot t} = e^{-(\sum_i \lambda_i) \cdot t}$$

avec comme taux instantané de défaillance :

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Dans ce cas, il suffit de connaître le taux théorique instantané de défaillance au niveau de chacun des éléments pour connaître la fiabilité du système.

En fait, tout le problème réside dans la difficulté d'exprimer la valeur des taux λ_i qui dépendent des contraintes (électriques, thermiques, mécaniques, ...).

Les principaux documents consultés par nous et donnant les taux de défaillance théoriques sont :

- Le "Reliability Notebook of Rome Air Development Center (ou la norme MIL. H.D.B.K. 217). (R.A.D.C.)
- Les valeurs données par certains fabricants de composants.
- Le recueil de données de Fiabilité du C.N.E.T.

D'une façon générale, on constate qu'il existe des écarts sur les résultats selon que l'on utilise une méthode ou une autre. D'après certains spécialistes français de la fiabilité les valeurs données par le R.A.D.C. sont pessimistes.

Dans ces documents, le taux de défaillance est souvent exprimé

sous la forme :

$$\lambda = \lambda_b \cdot \pi_E \cdot \pi_x \cdot \pi_y \dots + \Sigma_E$$

λ_b est donné par les courbes classiques du taux de défaillance en fonction de la température et du facteur de contrainte.

π_E et Σ_E dépendent de l'environnement et sont donnés avec deux valeurs : une valeur maximale et une valeur minimale.

π_x , π_y , ... sont des facteurs dépendants de l'utilisation des composants.

Si le niveau de confiance des données n'est pas toujours élevé, c'est que leur connaissance précise nécessiterait de faire des expériences pécuniairement irréalisables à l'heure actuelle. Au demeurant, on ne peut que souhaiter voir les utilisateurs prendre pleinement conscience de leur rôle en recueillant et en communiquant les informations sur la fiabilité d'exploitation.

Bien souvent, au niveau des sous-ensembles, la valeur la plus juste du taux de mortalité sera donnée par l'ingénieur fiabiliste du constructeur qui aura travaillé par comparaison avec des fabrications de technologie rapprochée, et avec son propre recueil de fiabilité.

Avant de clore ce chapitre, il faut parler de la dérive des composants électroniques. Ce phénomène n'est signalé que pour mémoire car il n'en sera pas tenu compte dans les calculs qui suivront ; et ceci pour deux raisons.

La première, c'est qu'au niveau de la fiabilité prévisionnelle, les calculs de la dérive ne sont généralement pas faits pour un ensemble complet.

La seconde, c'est qu'au cours de l'exploitation réelle, le parc est généralement désordonné (les temps d'utilisation sont hétérogènes) et les phénomènes de dérive au niveau du parc peuvent être inclus dans le système, en pondérant le taux de défaillance supposé constant au cours de la durée de vie utile.

Pour introduire la dérive dans les calculs prévisionnels, il

faudrait :

- chiffrer la dérive de chaque composant en déterminant les valeurs de la moyenne $\mu(t)$ et de la dispersion $\sigma(t)$ en fonction du temps,
- établir l'expression de la caractéristique de sortie du sous-ensemble (en fonction des différents composants et de l'entrée),
- en déduire les dérivées partielles,
- enfin, exprimer la valeur de la dérive d'un sous-ensemble.

Pour réaliser cette dernière opération, il existe différentes méthodes telles que la méthode des moments ou la méthode de simulation "Monte Carlo".

On comprend que tous ces calculs soient réservés à des cas critiques.

II.1.3. Intérêts des tests de fiabilité :

Les tests de fiabilité constituent un outil indispensable aux essais de fiabilité et à l'interprétation des résultats d'exploitation. Leur connaissance est d'une importance évidente pour une étude globale de la maintenance. Mais la présentation de tous ces tests dans ce chapitre de généralités serait fastidieuse et quelque peu superflue, puisque celle-ci est faite dans des ouvrages spécialisés. Bien qu'à notre connaissance il n'existe pas d'ouvrage traitant le sujet de façon exhaustive, le lecteur pourra se reporter à différents ouvrages tels que [3], [4] et [7].

II - 2 : MAINTENABILITE :

Tout comme la durée de vie, le temps nécessaire à la réparation d'un matériel est un phénomène aléatoire. La variable aléatoire est cette fois le "Temps de réparation".

Le mot "Maintenabilité" est encore plus récent que celui de "Fiabilité" et les notations ne sont pas encore très standardisées.

II.2.1. Loi mathématique :

C'est la fonction de maintenabilité $M(t)$ qui représente la probabilité pour que la réparation de l'ensemble ne soit pas encore finie à l'instant t (pour une réparation commencée à la date $t = 0$).

On admet généralement l'hypothèse selon laquelle la fonction $M(t)$ est exponentielle :

$$M(t) = e^{-\mu t}$$

où " μ " est le taux de remise en service instantané.

$\frac{1}{\mu}$ sera donc le temps moyen de la réparation.

II.2.2. Recherche du taux de remise en service instantané :

II.2.2.1. Maintenabilité prévisionnelle :

A notre connaissance, seuls les Américains se sont livrés à d'importantes études de Maintenabilité prévisionnelle.

On peut citer la norme "Military HandBook 472" qui permet d'obtenir des valeurs de temps moyens de réparation calculés à partir de coefficients de corrélation qui sont eux-mêmes fonction de la technologie du matériel (type d'appareil, nombre de tubes, etc ...).

Il faut remarquer que ces recueils de données ont été réalisés en calculant des axes de régression à partir des matériels américains existants à l'époque de l'étude, c'est-à-dire sur des matériels quelque peu périmés à l'heure actuelle.

Compte tenu de cette remarque, il semble qu'un résultat statistique bien interprété portant sur le temps de réparation d'un matériel simi-

laire à celui dont on étudie la maintenance soit aussi valable que l'usage des recueils américains.

II.2.2.2. Tests de maintenabilité :

Tester une V.A. "durée de vie" ou tester une V.A. "durée de réparation" est mathématiquement identique. La remarque du paragraphe II.1.3. relative aux tests de fiabilité est également valable ici.

II - 3 : DISPONIBILITE :

II.3.1. Introduction :

Un parc de n ensembles peut être défini à l'instant " t " par son état " E_i " si à cet instant le nombre d'ensembles en bon état est " i ".

Cet état varie dans le temps de façon aléatoire, mais les lois des phénomènes stochastiques permettent de connaître la probabilité pour que le parc (ou son modèle mathématique) soit dans l'état E_i à l'instant t .

Ce processus stochastique est à temps continu.

Dans le cas de dispositifs réparables, l'état E_i dépendra lui-même de deux processus stochastiques à variable continue t ; ce sont :

- le processus de défaillances
- le processus des remises en état

Dans toute la construction du modèle de maintenance, on supposera que le processus est "markovien" et stationnaire.

Dire que le processus est markovien signifie :

$$\text{Prob}\{E(\tau+d\tau) = j / E(\theta), \forall \theta < \tau\} = \text{Prob}\{E(\tau+d\tau) = j / E(\tau)\}$$

En définissant :

$$p_i(k) = \text{probabilité d'être dans l'état } E_i \text{ à l'instant "t".}$$

$P_{i,j}(\tau, \theta)$ = probabilité d'avoir E_j à l'instant θ alors qu'on avait E_i à l'instant τ .

On aura encore :

$$P_{i,j}(\tau, \theta) = \text{Prob} \{E(\theta) = j / E(\tau) = i\}, \quad \tau < \theta$$

Dire que le processus est stationnaire signifie que le passage de l'état E_i à l'état E_j ne dépend pas de τ , i.e. la probabilité $P_{i,j}(\tau, \theta)$ ne dépend que de $(\theta - \tau)$.

Alors, les matrices $P(t) = (p_{i,j}(t))$ forment un semi-groupe.

i.e. : $P(t+s) = P(t) \circ P(s)$

On rappelle que si la limite de $p_{i,j} = \delta_{i,j}$, les limites suivantes existent :

$$d_{i,j} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (p_{i,j}(t) - \delta_{i,j}) \leq +\infty$$

si $d_{i,i} < +\infty$ pour tout i , $d_{i,j} < +\infty$ pour tout (i,j) .

On appelle matrice "**D**" la matrice $(d_{i,j})$; c'est la matrice "génératrice" ou matrice "dynamique".

Les $p_{i,j}(t)$ vérifient alors la première équation de Kolmogorov :

$$\frac{d p_{i,j}(t)}{dt} = (D \circ P(t))_{i,j} \quad (\text{II.3.1.})$$

Dans des conditions assez générales, on a aussi la deuxième équation de Kolmogorov (équation "forward") :

$$\frac{d p_{i,j}(t)}{dt} = (P(t) \circ D)_{i,j} \quad (\text{II.3.2.})$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse (celui d'un processus de vie et de mort sur un ensemble fini) nous avons déjà dit que le modèle de maintenance mettra en jeu deux processus stochastiques.

Celui des "défaillances" sera stationnaire parce que pour du matériel électronique, les défaillances sont surtout catalectiques. Ce qui signifie que la probabilité pour qu'il se produise "j" défaillances dans un intervalle " $\Delta\tau$ " ne dépend pas de l'instant initial t_0 à partir duquel l'intervalle $\Delta\tau$ est mesuré (i.e. : $\lambda(i,t) = \lambda(i)$).

Autrement dit, si la matrice ligne $p(t)$ désigne la loi de probabilité absolue de l'élément $E(t) \in \{0,1,\dots,n\}$, la loi à l'instant $t+s$ de $E(t+s)$ est :

$$p(t+s) = p(t) \circ P(s)$$

et l'hypothèse de stationnarité revient à dire que :

$$p(\tau) = p(t) \circ P(\tau-t)$$

Par ailleurs, les théorèmes ergodiques, dans le cas qui nous préoccupe, permettent d'écrire :

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t) \quad \forall(i)$$

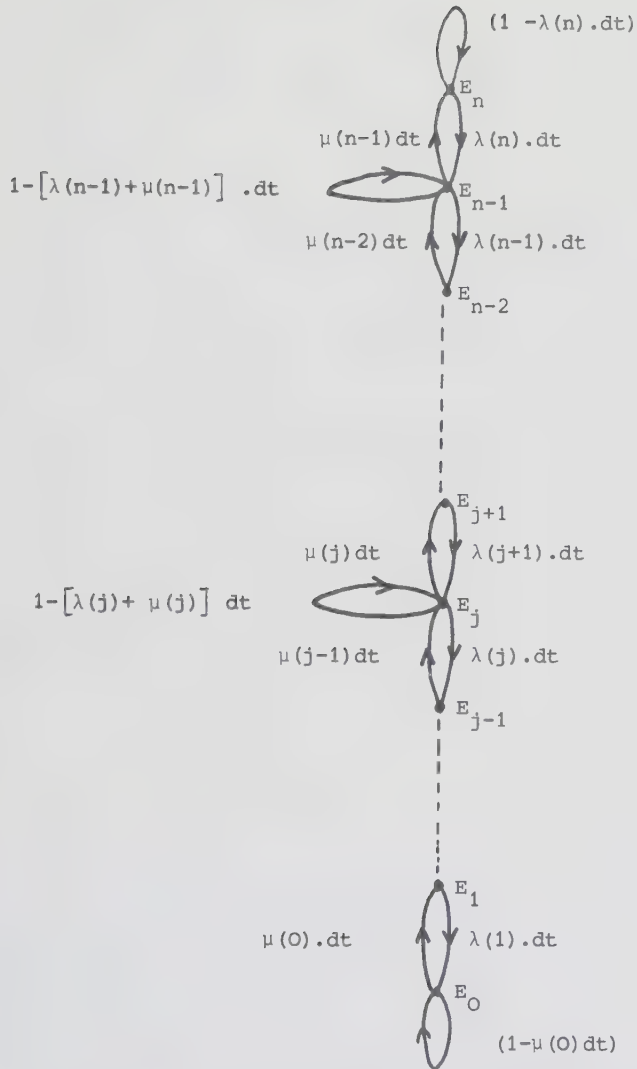
$\forall_i$, la ligne i de $P(t)$ converge vers $(p_j)_j$, l'équation montre alors que les limites étant, par définition, finies, la dérivée

$$\frac{d p_{i,j}(t)}{dt}$$

converge vers une limite qui ne peut être que nulle :

$$(II.3.2.) \implies 0 = p \circ D$$

Le régime stochastiquement permanent existe donc. Les éléments de la matrice génératrice étant directement définis à partir de la description du processus markovien - description qui peut se faire à l'aide d'un graphe :



on en déduit le système d'équations stochastiques lié à la relation matricielle précédente :

$$\begin{cases} 0 = -\lambda(n) \cdot p_n + \mu(n-1) p_{n-1} \\ 0 = \lambda(i+1)p_{i+1} + \mu(i-1)p_{i-1} - (\lambda(i) + \mu(i))p_i & 0 < i < n \\ 0 = \lambda(1) \cdot p_1 - \mu(0)p_0 \\ \sum_{i=0}^n p_i = 1 \end{cases}$$

Dans la suite de l'étude, nous considérerons deux cas de valeurs de $\lambda(i)$:

a) tous les ensembles fonctionnent à l'instant t et on a :

$$\lambda(i) = i \lambda_e$$

b) dans le cas d'un parc très important, le processus stochastique des défaillances est assimilé à un processus de Poisson et on a alors :

$$\lambda(i) \approx n \cdot \lambda_e$$

Quant aux valeurs de $\mu(i)$, on admettra que le processus au niveau d'une station de service est un processus de Poisson ou, ce qui est équivalent, que la loi des intervalles est exponentielle :

$$S(t) = e^{-\mu_2 t}$$

Alors, au niveau de la station de service, le taux de remise en service μ_2 est constant.

Il faut encore considérer deux cas de valeurs de $\mu(i)$ selon que le nombre de postes est égal ou supérieur au nombre n d'ensembles constituant le parc :

$$\mu(i) = (n-i) \mu_2 \quad \forall i$$

ou que le nombre r de stations est inférieur à n :

$$\begin{aligned} \mu(i) &= (n-i) \mu_2 && \text{pour } (n-i) \leq r \\ \mu(i) &= r \cdot \mu_2 && \text{pour } (n-i) \geq r \end{aligned}$$

Dans le but de les utiliser dans le chapitre III, nous allons maintenant rappeler l'expression des probabilités d'état asymptotiques d'un système formé de stations de service en parallèle. La source alimentant le système est supposée infinie, et les durées de service à loi expo-

nentielle. Ceci pour les deux cas particuliers suivants :

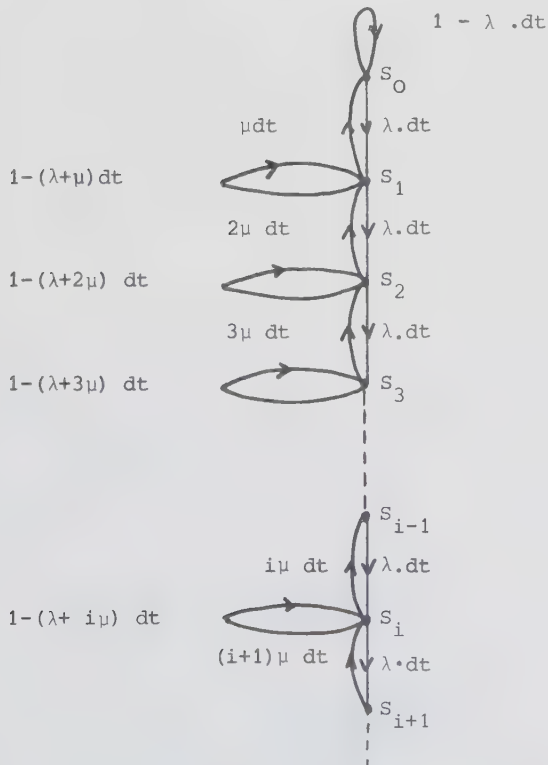
$$1/ \quad \lambda(i) = \lambda \quad , \quad \mu(i) = i$$

$$2/ \quad \lambda(i) = \lambda \quad ; \quad \mu(i) = \begin{cases} i & \text{si } i < r \\ r & \text{si } i \geq r \end{cases}$$

où "i" est le nombre d'éléments présents dans le système.

II.3.2. : Solution du système "permanent" pour $\lambda(i)=\lambda$ et $\mu(i)=i.\mu$

Si " S_i " est l'état du système lorsque "i" éléments sont dans celui-ci, le graphe du processus markovien est alors le suivant :



Et le système stochastique lié à la relation matricielle (II.3.2) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = (i+1)\mu p_{i+1} + \lambda p_{i-1} - (\lambda + i\mu) p_i \quad \forall i > 0 \\ 0 = \mu p_1 - \lambda p_0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \end{array} \right. \quad (1)$$

De l'équation (1), on déduit : $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$

En raisonnant par récurrence, on déduit facilement que :

$$p_i = \frac{p_0}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i = p_0 \frac{1^i}{i!} \quad \text{avec } 1 = \frac{\lambda}{\mu}$$

En écrivant que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

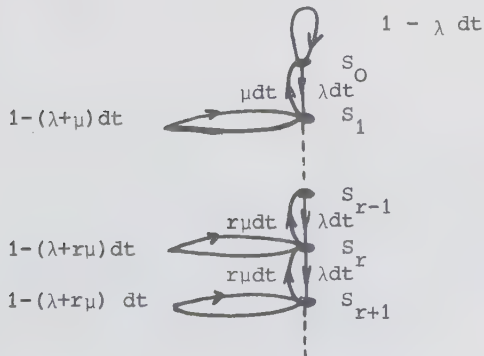
on obtient : $p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1^i}{i!}} = e^{-1}$ et $p_i = \frac{1^i}{i!} e^{-1}$

On reconnaît une fonction densité de la loi de probabilité de Poisson :

$$p_i = p(i, 1)$$

II.3.3. : Solution du système "permanent" pour $\lambda(i) = \lambda, \mu(i) = \begin{cases} i\mu & \text{si } i \leq r \\ r\mu & \text{si } i > r \end{cases}$

Le graphe du processus markovien est alors le suivant :



et le système stochastique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 = r\mu p_{i+1} + \lambda p_{i-1} - (\lambda + r\mu)p_i & \forall i \geq r \\ 0 = (i+1)\mu p_{i+1} + \lambda p_{i-1} - (\lambda + i\mu)p_i & 0 < i < r \\ 0 = \mu p_1 - \lambda p_0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1 \\ 0 \end{array} \right.$$

Pour $0 < i < r$, on obtient, comme précédemment :

$$p_i = p_0 \times \frac{1^i}{i!}$$

Pour $i \geq r$, on déduit par récurrence :

$$p_i = p_0 \frac{1^i}{r! r^{i-r}}$$

En écrivant que la somme des probabilités est égale à l'unité :

$$1 = p_0 \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \dots + \frac{1^r}{r!} + \frac{1^r}{r!} \left(\frac{1}{r} + \frac{1^2}{r^2} + \dots \frac{1^p}{r^p} + \dots \right) \right]$$

On obtient :

$$1 = p_0 \left[1 + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1^{r-1}}{(r-1)!} + \frac{1^r}{r!} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \right) \right]$$

$$\text{Soit : } p_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1^j}{j!} + \frac{1^r}{r! (1 - \frac{1}{r})}}$$

Il faut remarquer que ces équations ne sont valables que si :

$\frac{1}{r} < 1$ sinon, l'expression de " p_0 " n'a plus de sens mathématique ;
physiquement, le non respect de l'inégalité correspond au fait que le système ne peut absorber toutes les arrivées et que le nombre probable d'éléments dans la file d'attente ne cesse d'augmenter. On verra toute l'importance de cette remarque au chapitre suivant.

III - ETUDE DU PROCESSUS DE REPARATION ET OPTIMISATION

III - 1 : INTRODUCTION :

Cette étude est divisée en plusieurs parties suivant qu'il n'existe qu'un atelier (chapitre III - 2), "b" ateliers identiques responsables d'une proportion 1/b du parc (chapitre III - 3) ou de "b" ateliers responsables de parcs différents (chapitre III - 4).

Rappelons que nous voulons minimiser le coût de la maintenance de "n" ensembles identiques tout en respectant une contrainte sur la disponibilité. Celle-ci est exprimée par le fait que le nombre moyen d'ensembles en bon état doit être supérieur ou égal à un certain pourcentage "a" du parc "n" ; ce qui se traduit par :

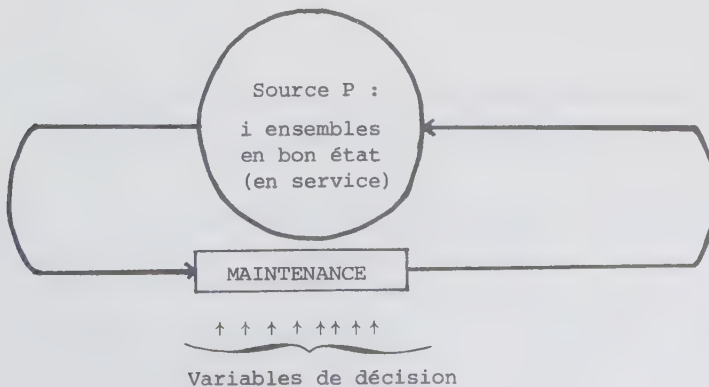
$$\bar{N} \geq an$$

où $\bar{N}$ est le nombre moyen d'ensembles en bon état.

III - 2 : MODELE A UN ATELIER :

III.2.1 : Généralités

On peut d'abord représenter le modèle par un réseau stochastique très simple :



Le parc est caractérisé par la variable aléatoire d'état $E(t) \in \{0,1,\dots,n\}$. $E(t)$ étant le nombre d'ensembles en bon état à la date t .

$$\text{Si } p_i(t) = \text{Prob } \{E(t) = i\}$$

$$\text{et si } p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) \text{ existe,}$$

la contrainte de disponibilité s'écrit :

$$\sum_{i=0}^{i=n} i.p_i \geq an$$

III.2.1.1 : Coût de maintenance et variables de décision

Nous supposons que l'infrastructure de la maintenance est fixée (lieu géographique).

Nous ne nous intéressons qu'aux coûts variables qui dépendent de la solution choisie. Nous pensons que pour un atelier de maintenance, le coût variable dépend essentiellement du nombre d'ouvriers et du niveau des stocks de pièces de rechange.

Aussi, le coût variable dépendra d'un certain nombre de variables de décision :

$$K = K(x, y_1, y_2, \dots, y_p)$$

où x = nombre d'ouvriers

y_i = ensemble des caractéristiques du stock relatif à la pièce i
(il existe p types de pièces de rechange).

Nous verrons dans les chapitres qui suivent la formulation précise de $K(x, y_1, y_2, \dots, y_p)$.

Simplifions les notations en posant $(u) = (x, y_1, y_2, \dots, y_p)$

III.2.1.2 : Disponibilité et variables de décision

Pour contrôler la contrainte

$$\begin{array}{l} i=n \\ \sum_{i=0} i.p_i > an \end{array}$$

il est nécessaire de connaître les probabilités d'état p_i , $i=0,1,\dots,n_i$; la finalité de l'étude étant d'optimiser un système, il est indispensable de mettre en évidence la relation $(u) \rightarrow (p_i)$

Dans ce but, le système de maintenance (soit S ce système) est décomposé en trois sous-systèmes S_1, S_2, S_3 , tels que :

S_1 : Sous-système formé par les ensembles en cours de transport (aller et retour)

S_2 : Sous-système formé par les ensembles en attente ou en cours de réparation

S_3 : Sous-système formé par les ensembles en "attente pour manque de pièce de rechange".

De même, on introduit quatre variables aléatoires $I(t), I_1(t), I_2(t), I_3(t)$, telles que :

$I(t)$: nombre d'ensembles dans S à l'instant t.

$I_1(t)$: nombre d'ensembles dans S_1 à l'instant t.

$I_2(t)$: nombre d'ensembles dans S_2 à l'instant t.

$I_3(t)$: nombre d'ensembles dans S_3 à l'instant t.

On remarque d'une part que

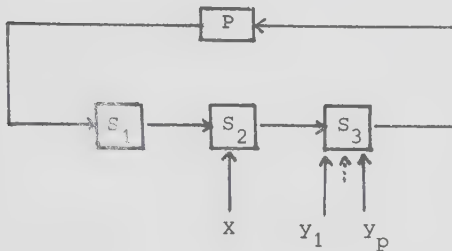
$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)$$

et, d'autre part, que les probabilités d'état de ces variables aléatoires dépendent des variables de décision de la façon suivante:

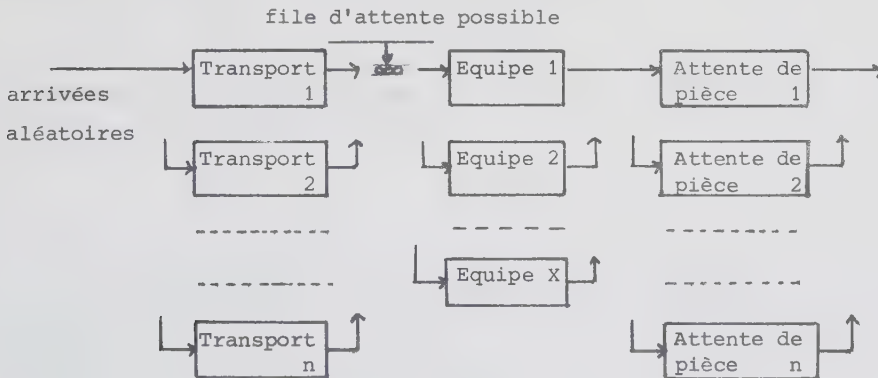
- La loi de $I_1(t)$ ne dépend d'aucune variable (dans le cadre de nos hypothèses)

- La loi de $I_2(t)$ dépend de la variable X
- La loi de $I_3(t)$ dépend des variables $y_1, y_2, \dots, y_p$.

Schématiquement, on obtient :



Mathématiquement, on se trouve devant un phénomène d'attente. En effet, on peut représenter le processus par un système S à plusieurs stations de service "en série" et "en parallèle" :



On représente n stations de service pour le "transport" comme pour l'attente pour manque de pièce", car dans ces deux cas, il n'y a pas de file d'attente possible. En effet, on suppose que l'attente est nulle si la pièce est au magasin, ce qui revient à dire qu'on néglige le temps passé au comptoir du magasin devant le temps d'attente pour manque de pièce.

Par contre, si le nombre X de réparations (ou des équipes de réparateurs) est inférieur au nombre n des ensembles, il n'est pas impossible qu'il se crée une file d'attente.

Compte tenu :

- des notions qui précèdent,
- des généralités sur les processus markoviens, et dans l'hypothèse où la loi de la variable aléatoire "temps de service" de chacune de ces stations suit une loi exponentielle,

on déduit que le système $Z(t) = (E(t), I_1(t), I_2(t), I_3(t))$ est un système markovien à quatre dimensions qui prend ses valeurs dans le simplexe $\{(e, i_1, i_2, i_3), e + i_1 + i_2 + i_3 = n\}$.

Ce système de Markov converge vers un état permanent.

Pour déterminer le vecteur stochastique d'état de ce système (vecteur qui suffit à définir celui de $E(t)$), on pourrait raisonner sur la matrice dynamique de ce processus ; cette matrice serait élaborée à l'aide des probabilités de transition entre les différents états de $Z(t)$. En remarquant que, par définition :

$$E(t) = n - (I_1(t) + I_2(t) + I_3(t))$$

On pourrait encore raisonner sur la matrice dynamique du processus $Z'(t) = (I_1(t), I_2(t), I_3(t))$ qui prend ses valeurs dans le simplexe $\{(i_1, i_2, i_3), i_1 + i_2 + i_3 \leq n\}$. Mais le nombre d'états du processus $Z(t)$ (comme celui du processus $Z'(t)$) a pour expression :

$$N = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}$$

et la matrice dynamique est une matrice carrée d'ordre N ...

Compte tenu des moyens de calculs actuels, la résolution d'un tel problème est vite limitée dans l'espace (capacité mémoire des ordinateurs) et dans le temps (durée d'exécution prohibitive).

C'est dans le but de sortir de cette impasse que sont énoncées les hypothèses simplificatrices du paragraphe suivant.

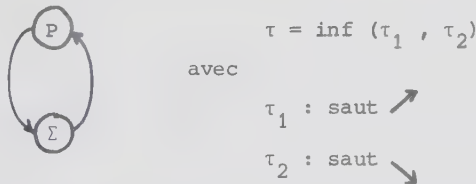
III.2.2 : Hypothèses simplificatrices

On cherche l'espérance mathématique $\mathbb{E}(E(t))$ du sous-système P ; mais le processus $E(t)$ n'est pas markovien :

$$\mathbb{E}[\varphi(E(t+h) | E(t_1), \dots, E(t))] \neq \mathbb{E}[\varphi(E(t+h) | E(t))]$$

En effet, pour que le processus soit markovien, il faudrait que la variable τ , temps qui sépare le premier saut du début de l'observation (date t), suive une loi de probabilité conditionnelle de $E(t) = i$ qui soit exponentielle.

Si nous avons seulement deux systèmes P et Σ formés tous les deux de stations à loi exponentielle en parallèle, on aurait :



τ_1 suivrait une loi de probabilité exponentielle de paramètre $\mu(n-i)$ et τ_2 suivrait une loi de probabilité exponentielle de paramètre $\lambda(i)$, alors, τ suivrait une loi de probabilité exponentielle de paramètre $\mu(n-i) + \lambda(i)$.

Hélas, si Σ est lui-même composé de trois sous-systèmes S_1, S_2, S_3 , ($\Sigma \rightarrow S$), alors τ_1 ne suit plus une loi de probabilité exponentielle. Cela veut dire que l'observation d'une seule composante telle que $E(t)$ du système $Z(t)$ n'est pas assez riche pour que son propre processus soit markovien.

Mais nous avons déjà dit que le système global $Z(t)$ (qui est markovien) possède un état stationnaire. Donc la limite :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}(E(t))$$

existe (signalons tout de suite que c'est sur elle que devra porter l'optimisation).

D'où l'idée de substituer au système S un système S' qui soit susceptible de donner les mêmes valeurs moyennes asymptotiques.

Le système S' choisi est obtenu de la façon suivante : on fait travailler le système S en régime asymptotique pour un flot d'entrées poissonnien (car, dans ce cas, on sait que la réponse est asymptotiquement poissonnienne). L'approximation est d'autant plus naturelle que, si n est assez grand, le flot n'est pas soumis à des fluctuations importantes et rapides.

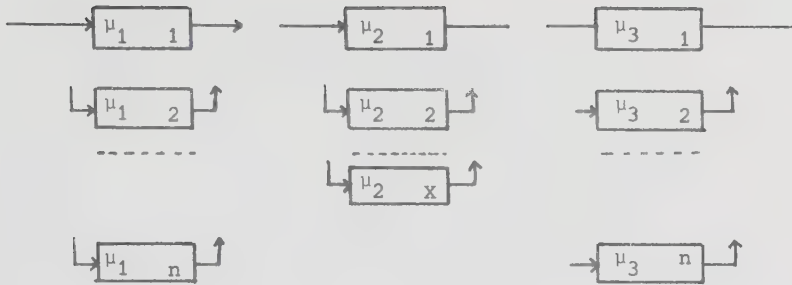
De par cette hypothèse du flot d'entrées poissonnien, les variables aléatoires $I_1(t)$, $I_2(t)$ et $I_3(t)$ deviennent indépendantes ; ceci est de la plus grande importance pour les calculs suivants où on cherchera le taux de sortie $\mu(i)$ du système S'. Dans ce but, on cherchera au paragraphe suivant la réponse asymptotique du système S dans le cas d'un flot d'arrivées poissonnien de paramètre λ .

Ce n'est qu'après avoir étudié cette réponse que nous examinerons le système S' précédemment défini en bouclage avec le sous-système P.

III.2.2.1 : Recherche de la réponse asymptotique de S' dans le cas d'un flot d'arrivées poissonnien de paramètre λ

Pour différencier ce mode de fonctionnement du mode normal, notons S'_1 , S'_2 , S'_3 les sous-systèmes.

Nous avons admis que les lois de service du système de stations en parallèle étaient toutes exponentielles :



Compte tenu de cette hypothèse, nous pouvons utiliser la démonstration de Monsieur H. Galliher [8] selon laquelle : "Dans un système de stations, si les lois de service sont exponentielles et si le taux d'arrivée est constant, le processus de sortie est asymptotiquement poissonnien" ... ; c'est-à-dire que les taux d'arrivées sur S'_2 et S'_3 sont égaux à λ :



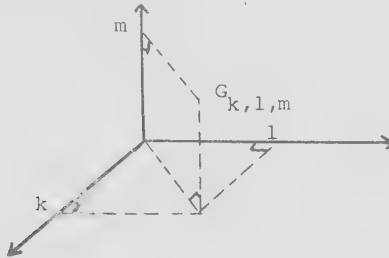
Il est alors possible de calculer les probabilités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} g_1(k) &= \text{Prob} \{I_1 = k\} & k &= 0, 1, \dots, \infty \\ g_2(l) &= \text{Prob} \{I_2 = l\} & l &= 0, 1, \dots, \infty \\ g_3(m) &= \text{Prob} \{I_3 = m\} & m &= 0, 1, \dots, \infty \end{aligned}$$

Ces probabilités sont calculées au chapitre III.2.3 en supposant qu'il peut y avoir une infinité d'ensembles dans les sous-systèmes S'_1 , S'_2 , S'_3 (ce sont des probabilités absolues en régime stationnaire pour le système S isolé avec un flot d'entrées poissonnien).

On peut noter $G_{k,l,m}$ l'état du système S' pour lequel on a : $I_1 = k$, $I_2 = l$, $I_3 = m$. A cet état, associons sa probabilité asymptotique $g(k,l,m)$.

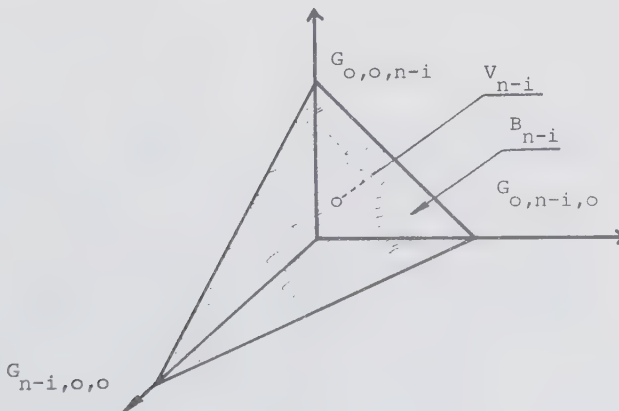
Dans un repère orthonormé dans E^3 , représentons l'état $G_{k,l,m}$ par le point de coordonnées entières (k, l, m) :



Sans restrictions, sur les valeurs possibles pour k, l, m , les états $G_{k,l,m}$ sont représentés par l'infinité de points à coordonnées entières du premier trièdre. La probabilité $g(k,l,m)$ est alors égale à $g_1(k) \cdot g_2(l) \cdot g_3(m)$ puisque les trois variables aléatoires I_1, I_2, I_3 sont indépendantes.

Cherchons maintenant la probabilité conditionnelle d'être dans l'état $G_{k,l,m}$ sachant que $k + l + m = n-i$. Soit $\eta(k,l,m,i)$ cette probabilité.

Si nous considérons la représentation des états possibles, ceux-ci sont sur la base B_{n-i} d'un tétraèdre V_{n-i} :



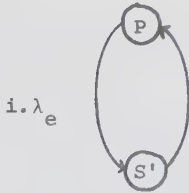
Si nous faisons une normalisation des probabilités absolues $g(k, l, m)$ sur l'ensemble des états possibles B_{n-i} , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \eta(k, l, m, i) &= \frac{g(k, l, m)}{\sum_{(B_{n-i})} g(k, l, m)} \\ &= \frac{g_1(k) \cdot g_2(l) \cdot g_3(m)}{\sum_{j=0}^{j=n-i} g_1(j) \left(\sum_{u=0}^{u=n-i-j} g_2(u) \cdot g_3'(n-i-j-u) \right)} \end{aligned}$$

III.2.2.2. Etude du système approché S' précédemment défini bouclé avec le sous-système P

Le système étant bouclé, la valeur de λ est imposée par l'état $E(t)$ du parc :

$$\{\lambda/E(t) = i\} = i \cdot \lambda_e$$



Le système S' est identique au système du paragraphe III.2.2 ; cela veut dire que les lois de services sont exponentielles ; par conséquent, la démonstration de Monsieur Gallier est encore applicable au système S' (elle ne le serait pas au système S)

Aussi, lorsque $\lambda = i \lambda_e$, les taux d'arrivées sur S'_1, S'_2, S'_3 sont égaux à $i \lambda_e$:



Il est alors possible de calculer les probabilités :

$v_{1_i}(k) = \text{Prob} \{I_1 = k\}$ alors que le taux d'arrivée sur S'_1 est $i\lambda_e$

$v_{2_i}(l) = \text{Prob} \{I_2 = l\}$ alors que le taux d'arrivée sur S'_2 est $i\lambda_e$

$v_{3_i}(m) = \text{Prob} \{I_3 = m\}$ alors que le taux d'arrivée sur S'_3 est $i\lambda_e$

Si $v_i(k, l, m)$ est la probabilité d'être dans l'état $G_{k, l, m}$ (précédemment défini), on a :

$$v_i(k, l, m) = v_{1_i}(k) \cdot v_{2_i}(l) \cdot v_{3_i}(m)$$

On peut alors, comme dans le paragraphe précédent chercher la probabilité conditionnelle d'être dans l'état $G_{k, l, m}$ sachant que $k + l + m = n-i$; Si nous appelons $\xi(k, l, m, i)$ cette probabilité, on a par normalisation :

$$\xi(k, l, m, i) = \text{Prob} \{I_1 = k, I_2 = l, I_3 = m / I = n-i\}$$

$$\text{Prob} \{I_1=k, I_2=l, I_3=m / I=n-i\} = \frac{v_{1_i}(k) \cdot v_{2_i}(l) \cdot v_{3_i}(m)}{\sum_{j=0}^{n-i} v_{1_i}(j) \left(\sum_{u=0}^{n-i-j} v_{2_i}(u) \cdot v_{3_i}(n-i-j-u) \right)}$$

Nous verrons plus loin qu'il est alors facile d'obtenir le taux de remise en service à partir de cette probabilité.

Il a été possible de comparer les résultats donnés par la méthode exacte de la matrice dynamique d'une part, et par la méthode approchée d'autre part. Cette recherche a été faite sur un parc de 20 ensembles (cf. le complément C-III 2/A). Compte-tenu des valeurs numériques prises pour les différents paramètres, on trouve par la méthode de la matrice dynamique une disponibilité de 14,25.. alors que le résultat donné par le calcul effectué sur le système S' est de 14,26... On constate (de même que pour les autres exemples traités) que la différence est alors inférieure au $\frac{1e}{1000}$

Il faut d'ailleurs remarquer qu'à ce niveau, il est difficile de dire que l'un des deux résultats est préférable à l'autre ; car même si la méthode de la matrice dynamique est mathématiquement exacte, l'ordinateur, en tronquant les valeurs numériques, introduit là aussi une approximation.

C'est ici qu'intervient la remarque faite au paragraphe II.2.3 : l'hypothèse simplificatrice n'est valable que si $n \cdot \lambda_e < X \mu_2$; sinon la probabilité $v_2(u)$ n'existe pas. Cette restriction n'a qu'une importance relative car ⁿ il est peu probable qu'un tel cas se rencontre dans la réalité.

Il faut être conscient qu'il reste un problème mathématique non résolu : quelle est la formule paramétrique exprimant l'approximation faite en passant du système "S" au système "S'" ? Voilà qui pourrait constituer l'objet d'une autre étude ! Afin de cerner cette approximation, quelques remarques sont rassemblées au complément C-III 2/B.

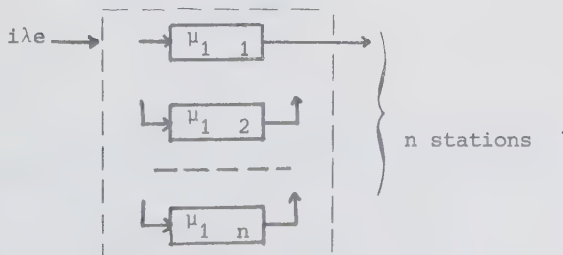
III.2.3 : Calcul de $v_{1i}(k), v_{2i}(l), v_{3i}(m)$

III.2.3.1 : Etude de $v_{1i}(k)$

Ici, nous étudions le système :



Nous avons vu en "III.2.1.2" que le modèle mathématique du phénomène de transport pouvait se représenter par :



C'est le cas bien connu d'un système d'attente ouvert possédant plusieurs stations en parallèle. Sous réserve que, dans chaque station, la distribution des temps de transport suive une loi exponentielle de paramètre μ_1 , la probabilité pour qu'il se trouve "k" ensembles dans le système de transport à un instant quelconque sera :

$$v_{1_i}(k) = v_{1_i}(0) \cdot \frac{(i \cdot \lambda_e / \mu_1)^k}{k!} \quad \text{avec} \quad v_{1_k}(0) = e^{-(i \cdot \lambda_e / \mu_1)}$$

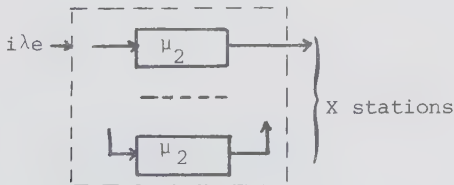
Remarquons qu'il y a toujours autant de stations que d'ensembles dans le système : c'est donc un cas particulier des phénomènes d'attentes puisque là, justement, il n'y aura pas d'attente.

III.2.3.2 : Calcul de $v_{2_i}(k)$

Nous étudions le système :



Le modèle mathématique du phénomène permet de considérer X stations en parallèle (avec des lois exponentielles) :



C'est là encore un système ouvert : la probabilité pour qu'il existe l ensembles dans l'atelier (en attente ou dans les mains des réparateurs) sera :

$$v_{2_i}(1) = v_{2_i}(0) \cdot \frac{(i \cdot \lambda_e / \mu_2)^1}{1!} \quad \text{si } 1 \leq X$$

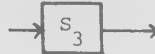
$$v_{2_i}(1) = v_{2_i}(0) \cdot \frac{(i \cdot \lambda_e / \mu_2)^1}{X! \cdot X^{1-X}} \quad \text{si } 1 > X$$

avec

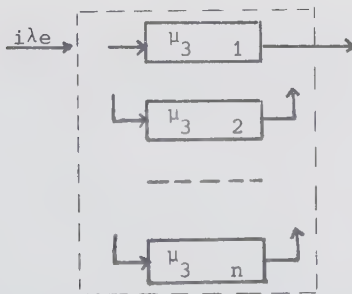
$$v_{2_i}(0) = \frac{1}{\frac{(i \cdot \lambda_e / \mu_2)^X}{X! (1 - i \cdot \lambda_e / X \mu_2)} + \sum_{j=0}^{j=X-1} \frac{(i \cdot \lambda_e / \mu_2)^j}{j!}}$$

III.2.3.3 : Calcul de v_{3_i} (n)

Nous étudions le système :



Là encore, nous pouvons représenter le modèle mathématique de la façon suivante :



On a, comme en III.2.3.1 :

$$v_{3_i}(m) = v_{3_i}(0) \cdot \frac{(i \cdot \lambda_e / \mu_3)^m}{m!} \quad \text{avec} \quad v_{3_i}(0) = e^{-(i \lambda_e / \mu_3)}$$

Cette fois la valeur du taux moyen μ_3 est plus complexe : en effet, sa détermination nécessite une étude des stocks et leur optimisation, car μ_3 est fonction des variables de décision $\{y_1, \dots, y_p\}$. Le chapitre III.2.7 est consacré à cette recherche.

III.2.4 : Taux de remise en service $\mu(i)$

Nous avons vu en "III.2.2.2" que la probabilité $\xi_{(k,l,m)}$ d'être dans l'état $G_{k,l,m}$ sachant que le parc est dans l'état E_i s'écrit :

$$\xi_{(k,l,m,i)} = v_{1_i}(k) \cdot v_{2_i}(l) \cdot v_{3_i}(m) \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-i} v_{1_i}(j) \left(\sum_{u=0}^{n-i-j} v_{2_i}(u) \cdot v_{3_i}(n-i-j-u) \right)}$$

Soit $\delta_{n-i,m}$, la probabilité pour qu'il y ait "m" ensembles en "attente de pièces" lorsque le parc est dans l'état E_i .

Pour les états $G_{k,l,m}$ ayant une même valeur de m, le taux de remise en service $\mu(i)$ sera :

$$\mu(i)_m = m \cdot \mu_3$$

et la probabilité $\delta_{n-i,m}$ d'avoir une telle valeur de m :

$$\delta_{n-i,m} = \sum_{k=0}^{n-i-m} \xi_{(k,l,m,i)} \quad \text{avec } l=n-i-m-k$$

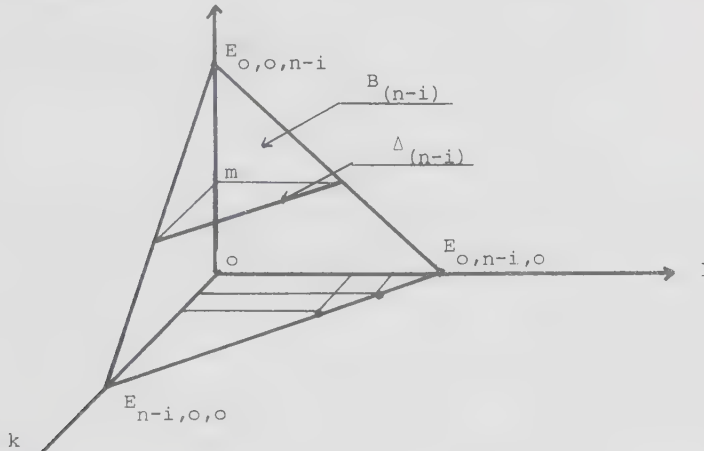
Donc, le taux de service s'écrit :

$$\mu(i) = \sum_{m=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{n-i-m} m \cdot \mu_3 \cdot \xi_{(k,l,m,i)} \quad , \quad \text{avec } l=n-i-m-k$$

En résumé, on calcule toutes les probabilités $v_{1_i}(k)$, $v_{2_i}(l)$, $v_{3_i}(m)$ pour $k, l, m \leq n-i$,

puis on cherche les probabilités $p'_{k,l,m}(i) = v_{1_i}(k) \cdot v_{2_i}(l) \cdot v_{3_i}(m)$ telles que $k+l+m = n-i$.

Ensuite, on calcule la probabilité $\varepsilon_{(n-i)}$ somme de toutes les probabilités $p'_{k,l,m}(i)$ contenues dans le triangle $B_{(n-i)}$ défini par $(n-i)$:



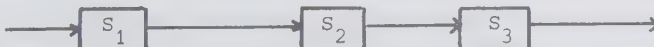
On obtient alors $\xi_{(k,l,m,i)} = \frac{p'_{k,l,m}(i)}{\varepsilon_{(n-i)}}$

On en déduit les probabilités $\delta_{n-i,m}$ somme de toutes les probabilités qui, contenues sur $B_{(n-i)}$, ont même valeur de m .

Il suffit alors de calculer :

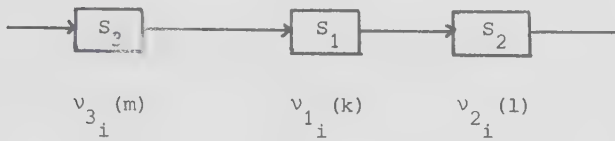
$$\mu(i) = \sum_{m=0}^{m=n-i} m \cdot \mu_3 \cdot \delta_{n-i,m}$$

Avant de considérer comme acquise la connaissance de $\mu(i)$, il convient de faire une remarque. Lorsque nous avons décomposé le phénomène de la maintenance en 3 variables aléatoires I_1, I_2, I_3 afin d'élaborer le modèle :



l'ordre dans lequel nous avons fait succéder les systèmes S_i n'avait rien de cartésien, si ce n'est qu'il fallait en choisir un.

Maintenant, nous sommes en droit de nous demander si un ordre tel que :



qui est tout aussi plausible, conduirait au même résultat mathématique du taux de remise en service. Autrement dit, est-ce que l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{m=n-i} \sum_{k=0}^{k=n-i-m} m \cdot \mu_3 \cdot \xi(k, l, m, i) &= \sum_{l=0}^{l=r} \sum_{k=0}^{k=n-i-1} l \cdot \mu_2 \cdot \xi(k, l, m, i) \\
 &+ \sum_{l=r+1}^{l=n-i} \sum_{k=0}^{k=n-i-1} r \cdot \mu_2 \cdot \xi(k, l, m, i)
 \end{aligned}$$

avec $l = n-i-m-k$

Bien qu'il soit raisonnable de le penser, nous avons préféré le démontrer dans le complément C-III 2/C.

On peut encore émettre une autre éventualité : que les ensembles subissent une réparation par étapes et reviennent dans le système " S_2 " après passage dans le système " S_3 ". Le complément C-III 2/D montre que le résultat reste inchangé si on n'introduit pas de priorités particulières.

III.2.5 : Disponibilité

D'une façon générale, les équations d'état donnant le régime permanent sont celles écrites ci-après :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(i+1) \cdot p_{i+1} = [\lambda(i) + \mu(i)]p_i - \mu(i-1) \cdot p_{i-1} \quad \text{pour } 0 < i \leq n-1 \quad (1) \\ \lambda(1) \cdot p_1 = \mu(0) \cdot p_0 \\ \lambda(n) \cdot p_n = \mu(n-1) \cdot p_{n-1} \end{array} \right.$$

On démontre par récurrence la formule :

$$p_{i+1} = p_0 \cdot \frac{\prod_{j=0}^{j=i} \mu(j)}{\prod_{j=1}^{j=i+1} \lambda(j)}$$

En appelant : $i-1$

$$k_i = \frac{\prod_{j=0}^{j=i} \mu(j)}{\prod_{j=1}^{j=i+1} \lambda(j)}$$

On obtient encore :

$$k_{i+1} = k_i \frac{\mu(i)}{\lambda(i+1)}$$

$$\text{et : } p_{i+1} = p_0 \cdot k_{i+1}$$

En écrivant que la somme des probabilités p_i est égale à l'unité, on a :

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^n k_i}$$

D'où :

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_{j=0}^n k_j}$$

Rappelons que, dans notre cas :

$$\lambda(i) = i \cdot \lambda_e$$

La contrainte sur la disponibilité $\bar{N}$, telle que nous l'avons énoncée, se traduit par :

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{i \cdot K_i}{n} \geq an$$

Remarquons que l'introduction d'une nouvelle contrainte tenant compte de la variance des probabilités d'état serait assez facile car ces probabilités d'état sont directement accessibles. De même, il serait possible de vérifier une contrainte du type :

$$\sum_{i=a}^{i=n} p_i \geq P$$

III.2.6 : Application

On considère un parc de 40 ensembles, chacun d'eux ayant un taux de mortalité : $\lambda_e = 0,5 \times 10^{-2}$

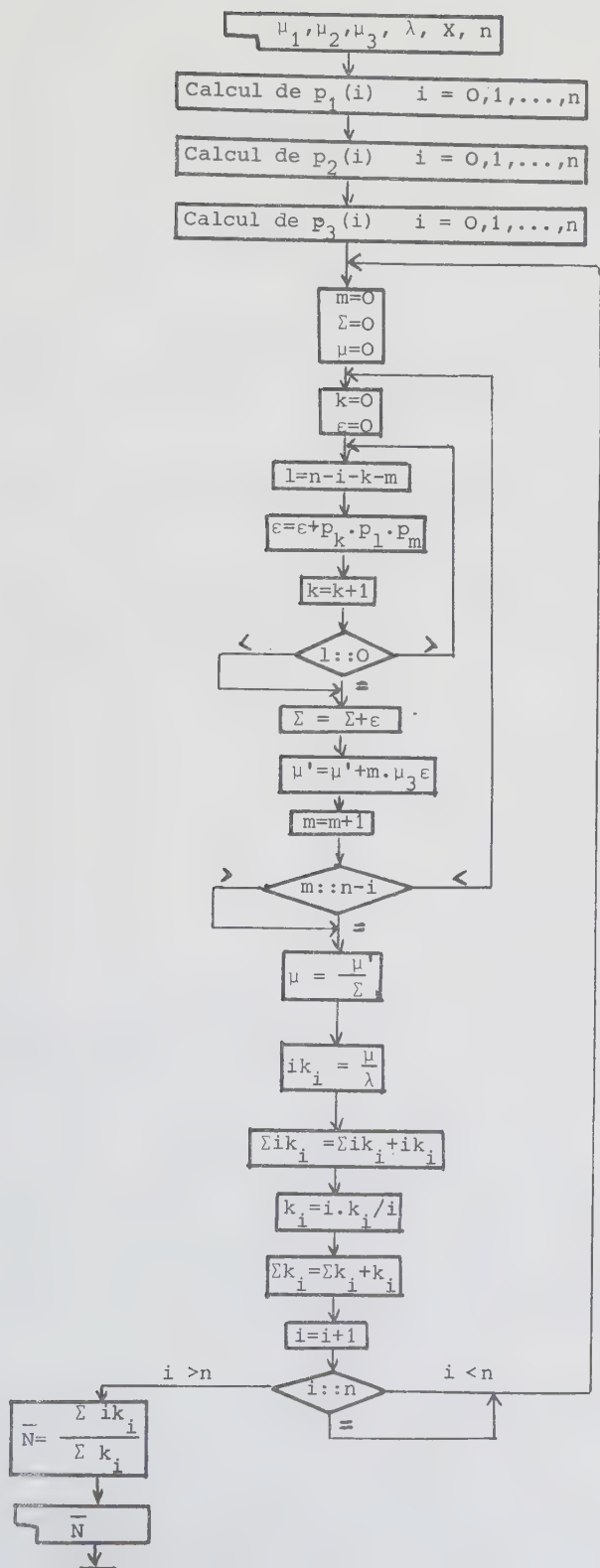
Les différents taux de remise en service des stations à loi exponentielle sont les suivants :

$\mu_1 = 0,1$ pour les stations du système S_1 (transport).

$\mu_2 = 0,05$ pour les stations du système S_2 (réparation).

$\mu_3 = 0,1$ pour les stations du système S_3 (attente pour manque de pièce).

Le programme
passé sur ordinateur
correspond à
l'organigramme
ci-contre



Les calculs réalisés sur l'ordinateur donnent une disponibilité de :

$$33,23$$

pour le cas où $X = 6$.

Un programme légèrement différent a permis d'obtenir les valeurs de $\mu(i)$ et de $p(i)$ pour les valeurs $i = 0, 1, 2, \dots, 40$, avec les mêmes valeurs que ci-dessus. (planches P3/I, P3/II, P3/III)

Le graphique de la planche P3/I qui représente $\mu(i)$ en fonction de i conduit à faire quelques remarques.

Lorsque $n-i \leq X$, le temps moyen passé à l'intérieur du système de maintenance par les ensembles défectueux est :

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = 40$$

et le taux de sortie est alors :

$$\mu(i) = \frac{n-i}{40} \quad \text{pour } n-i \leq X$$

Par exemple, lorsqu'il n'y a qu'un ensemble dans le système de maintenance, le taux de sortie est de $\frac{40-39}{40} = 0,025$; c'est bien la valeur donnée par le programme et reproduite sur le graphique.

Lorsque i tend vers les faibles valeurs, la réparation se sature ; on est (presque) certain qu'il existe une attente pour réparation. Une diminution de i augmente le nombre d'ensembles dans le système de maintenance mais augmente aussi l'attente pour réparation. Soit " x " le nombre total d'ensembles dans le système de maintenance : $x' = n-i$.

Soit $\overline{T}_1 = \frac{1}{\mu_1}$, temps moyen du transport, et de la même façon :

$$\overline{T}_2 = \frac{1}{\mu_2} , \quad \overline{T}_3 = \frac{1}{\mu_3}$$

En considérant les flux permanents, on peut trouver x_1 , nombre moyen d'ensembles en attente de réparation :

$$x_1 = x' - X - x' \cdot \left(\frac{\overline{T}_1 + \overline{T}_3}{\overline{T}} \right)$$

où $x' \left(\frac{\overline{T}_1 + \overline{T}_3}{\overline{T}} \right)$ est le nombre moyen d'ensembles qui

sont soit en transport, soit en attente pour manque de pièce. D'autre part, comme il y a X stations de réparation, le temps moyen pour la réparation et son attente sera :

$$\left(\frac{x_1 + X}{X} \right) \cdot \overline{T}_2$$

Donc :

$$\overline{T} = \overline{T}_1 + \overline{T}_3 + \left(\frac{x_1 + X}{X} \right) \overline{T}_2$$

En remplaçant x_1 par sa définition :

$$\overline{T} = \overline{T}_1 + \overline{T}_3 + \frac{x'}{X} \left(1 - \frac{\overline{T}_1 + \overline{T}_3}{\overline{T}} \right) \overline{T}_2$$

Mais $\mu = \frac{x'}{\overline{T}}$; d'où :

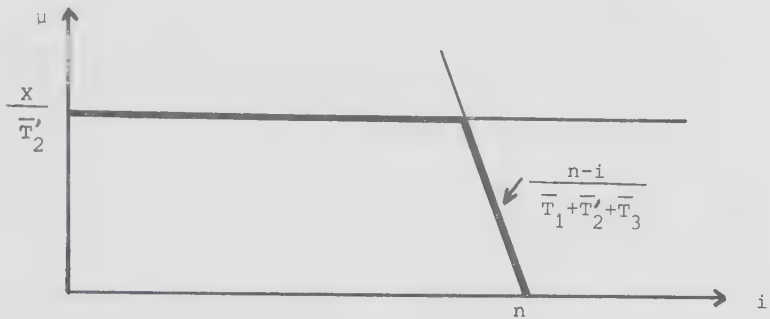
$$\overline{T} = \overline{T}_1 + \overline{T}_3 + \mu \cdot \frac{\overline{T}_2}{X} (\overline{T} - \overline{T}_1 - \overline{T}_3)$$

Soit :

$$\mu = \frac{X}{\overline{T}_2}$$

Dans notre exemple : $\mu = \frac{6}{20} = 0,3$

C'est la valeur donnée par le programme et reproduite sur la planche P3/I qui a donc l'allure suivante :



C-III 2/A- Comparaison entre la méthode exacte et la méthode approchée

Partant du raisonnement sur la matrice dynamique du processus markovien, examinons comment le calcul permet de trouver la disponibilité.

Les éléments $d_{i,j}$ de la matrice $\mathcal{D}$ sont directement définis à partir de la description du processus markovien lié au système "S" ; cette description est faite à l'aide du graphe tridimensionnel représenté planche P3/IV . On en déduit :

$$(1) \quad p_{k,l,m}(t+dt) = (i+1)\lambda_e \cdot p_{k-1,l,m}(t) + (k+1)\mu_1 p_{k+1,l,m}(t) + \min(r,l+1) \cdot \mu_2 \cdot p_{k,l+1,m}(t) \\ + (m+1) \cdot \mu_3 p_{k,l,m+1}(t) - i\lambda_e + k\mu_1 + \min(r,l) \cdot \mu_2 + m\mu_3 \cdot p_{k,l,m}(t)$$

Cette formule reste valable dans le cas où l'état $E_{k-1,l,m}$ (respectivement $E_{k+1,l-1,m}$ et $E_{k,l+1,m-1}$) n'existe pas, à condition de prendre la convention selon laquelle $p_{k-1,l,m}$ (respectivement $p_{k+1,l-1,m}$ et $p_{k,l+1,m-1}$) est nulle si l'état n'existe pas (cas des états situés sur

les "frontières" du graphe).

Pour effectuer le calcul matriciel, on sait que, dans le cas où $n = 20$, la matrice dynamique occuperait à elle seule :

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} \right]^2 = 3\,136\,441 \text{ mots}$$

Aussi, on a préféré appliquer directement l'équation (1) en calculant les probabilités d'état $\text{Prob} \{I_1 = k, I_2 = l, I_3 = m\}$ à l'aide de deux tableaux unidimensionnels (pour les instants t et $t+dt$). Les indices "j" de chaque tableau sont liés de façon biunivoque par la relation :

$$j = k + 1(n+2) + m(n+2)^2$$

L'indice "j" du tableau est lié à la base $(n+2)$ plutôt qu'à la base n afin que l'équation (1) reste valable sur les "frontières" du graphe. Ce qui simplifie beaucoup le programme de calcul.

Le même but serait atteint en considérant deux tableaux tridimensionnels (de dimension $n+3$) dont les indices seraient directement liés aux triples (k, l, m) mais un bref calcul permet de montrer que la décomposition en base $(n+2)$ demande moins de place en mémoire.

Un premier calcul numérique a été fait avec les valeurs des paramètres ci-après :

$$\lambda = 0,01, \mu_1 = 0,10, \mu_2 = 0,05, \mu_3 = 0,1, x = 6$$

La planche P3/V montre comment la disponibilité transitoire initialement fixée à 20 (cas d'un parc neuf à $t = 0$) tend vers la disponibilité permanente.

On remarquera, en comparant cela et la M.T.B.F. d'un ensemble, qu'une disponibilité "quasi-permanente" est atteinte relativement vite.

Un deuxième calcul numérique a été fait avec les valeurs :

$$\lambda = 0,01, \mu_1 = 0,2, \mu_2 = 0,1, \mu_3 = 0,2, \quad X = 3$$

Entre cet exemple et le précédent, la principale différence est que le phénomène d'attente (dans le système " S_2 ") est plus sensible ici.

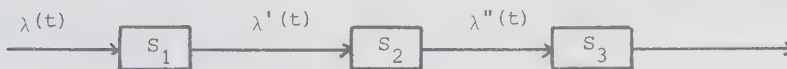
La planche P3/VI montre comment évolue la disponibilité initialement fixée à 20.

On remarque là encore que l'écart entre les deux méthodes est inférieur à $\frac{1}{1000} e$

Pour ces exemples, il n'a pas été fait de représentations graphiques des probabilités d'état obtenues par les deux méthodes. En effet, les deux représentations seraient graphiquement confondues compte-tenu que les écarts absolus sont tous inférieurs à 10^{-4} .

C-III 2/B - Remarques relatives à l'hypothèse simplificatrice

Reprenons le système S précédemment défini :



En considérant l'évolution dans le temps, on n'a plus :

$$\lambda(t) = \lambda'(t) = \lambda''(t)$$

On peut considérer que $\lambda'(t)$ a un certain retard sur $\lambda(t)$; retard que nous appellerons $\theta_1(t) = \lambda(t) - \lambda'(t)$

De même, on peut considérer que $\lambda''(t)$ a un certain retard sur $\lambda'(t)$; retard que nous appellerons $\theta_2(t) = \lambda'(t) - \lambda''(t)$.

Considérons le système S_1 à la date t_0 , date à laquelle l'état du parc passe de E_i à E_{i+1} . On suppose, dans cette approximation, que la transition précédente est suffisamment lointaine pour que

$$\lambda(t) = \lambda'(t) \text{ à } t = t_0 - \varepsilon$$

Juste avant cette date t_0 , le taux d'arrivée $\lambda(t)$ était égal à :

$$\lambda'(t) = \lambda(t) = \sum_{j=0}^{n-i} j \cdot \mu_1 \cdot v_{1i}(j) = i \cdot \lambda_e$$

où $v_{1i}(j)$ = probabilité pour qu'il y ait "j" ensembles dans le sous-système S_1 alors que le taux d'arrivée est " $i \cdot \lambda_e$ ".

A partir de la date t_0 , les taux deviennent :

$$\lambda(t) = (i+1) \lambda_e$$

$$\lambda'(t) = \mu_{11}(t) + \mu_{12}(t)$$

où $\mu_{11}(t)$: taux de sortie de S_1 (à la date t) des ensembles arrivés avant la date t_0 .

$\mu_{12}(t)$: taux de sortie de S_1 (à la date t) des ensembles arrivés après la date t_0 .

Expression de $\mu_{11}(t)$:

$$\mu_{11}(t) = \sum_{k=0}^{n-i} k \cdot \mu_1 \cdot V_k(t) / i \cdot \lambda_e$$

où $V_k(t) / i \lambda_e$ = probabilité pour qu'il reste "k" ensembles dans S_1 (à la date t) parmi ceux qui étaient dans S_1 à la date t_0 .

$$\text{On a : } v_k(t) = \sum_{j=k}^{j=n-i} w_{k/j}(t) \cdot v_{1_i}(j)$$

où $w_{k/j}(t)$ = probabilité pour qu'il reste "k" ensembles dans S_1 (à la date t) alors qu'il y avait "j" ensembles dans S_1 à la date t_0 .

On sait que, dans ce cas, la distribution de probabilité est celle d'une loi binomiale :

$$w_{k/j}(t) = b[k; j, e^{-\mu_1(t-t_0)}]$$

On peut écrire :

$$\mu_{11}(t) = \sum_{k=0}^{k=n-i} k \cdot \mu_1 \sum_{j=k}^{j=n-i} b[k; j, e^{-\mu_1(t-t_0)}] \cdot v_{1_i}(j)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} \mu_{11}(t) &= \sum_{j=0}^{j=n-i} \mu_1 \sum_{k=0}^{k=j} k \cdot b[k; j, e^{-\mu_1(t-t_0)}] \cdot v_{1_i}(j) \\ &= \sum_{j=0}^{j=n-i} \mu_1 \cdot v_{1_i}(j) \cdot \sum_{k=0}^{k=j} k \cdot b[k; j, e^{-\mu_1(t-t_0)}] \end{aligned}$$

On reconnaît, dans la deuxième sommation la moyenne de la loi binomiale ; on a donc

$$\mu_{11}(t) = \sum_{j=0}^{j=n-i} \mu_1 \cdot v_{1_i}(j) = j \cdot e^{-\mu_1(t-t_0)}$$

soit :

$$\mu_{11}(t) = i \cdot \lambda_e \cdot e^{-\mu_1(t-t_0)}$$

Expression de $\mu_{12}(t)$.

Considérons un élément arrivant dans S_1 sur l'intervalle de temps $[\tau, \tau + d\tau], \tau \in]t_0, t]$, avec la probabilité $(i+1) \cdot \lambda_e \cdot d\tau$.

La probabilité pour que celui-ci sorte du système S_1 à l'instant t s'écrit :

$$\mu_1 e^{-\mu_1(t-\tau)} d\tau$$

En considérant tous les intervalles de temps $d\tau$ sur l'intervalle $]t_0, t]$ on obtient :

$$\mu_{12}(t) \cdot d\tau = \int_{t_0}^t (i+1) \lambda_e \cdot d\tau \mu_1 \cdot e^{-\mu_1(t-\tau)}$$

ou

$$\mu_{12}(t) = (i+1) \lambda_e \int_0^{t-t_0} \mu_1 e^{-\mu_1 v} dv$$

soit :

$$\mu_{12}(t) = (i+1) \lambda_e [1 - e^{-\mu_1(t-t_0)}]$$

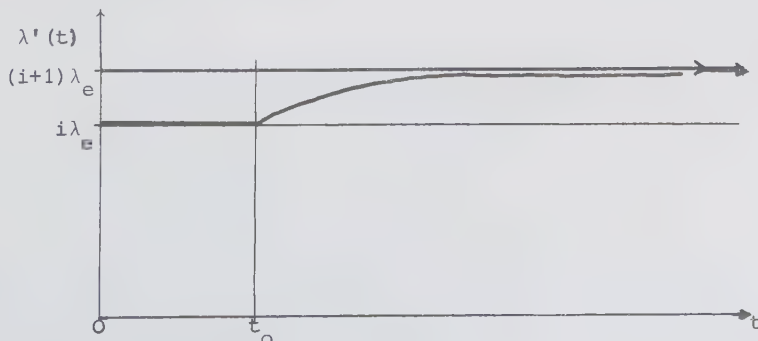
On obtient ainsi l'expression de $\lambda'(t)$:

$$\lambda'(t) = \mu_{11}(t) + \mu_{12}(t)$$

$$= i \lambda_e e^{-\mu_1(t-t_0)} + (i+1) \lambda_e [1 - e^{-\mu_1(t-t_0)}]$$

$$= (i+1) \lambda_e - \lambda_e e^{-\mu_1(t-t_0)}$$

Ce qui donne graphiquement :



De la même façon, si on considère la transition $E_{i+2} \rightarrow E_{i+1}$ (dans les mêmes conditions), on a :

$$\lambda'(t) = \mu_{11}(t) + \mu_{12}(t) + \mu_1 e^{-\mu_1(t-t_o)}$$

- car cette fois, il rentre un ensemble dans S_1 à la date t_o -

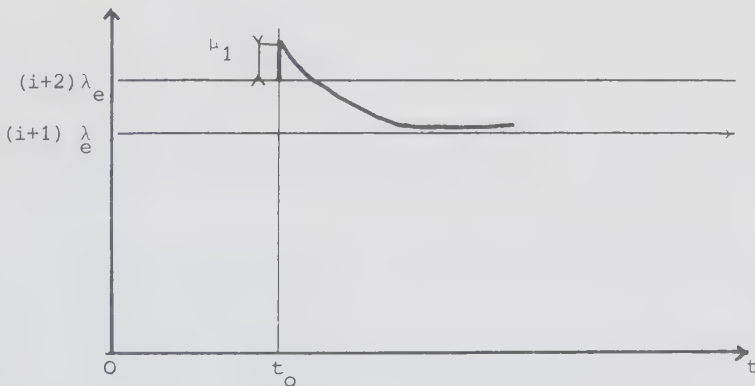
$$\text{avec } \mu_{11}(t) = (i+2) \lambda_e e^{-\mu_1(t-t_o)}$$

$$\text{et } \mu_{12}(t) = (i+1) \lambda_e [1 - e^{-\mu_1(t-t_o)}]$$

Soit :

$$\lambda'(t) = (i+1) \lambda_e + (\mu_1 + \lambda_e) e^{-\mu_1(t-t_o)}$$

On peut encore représenter graphiquement $\lambda'(t)$:



Des calculs précédents, on déduit que :

$$\theta_1(t) / E_i \rightarrow E_{i+1} = \lambda_e e^{-\mu_1(t-t_o)}$$

$$\theta_1(t) / E_{i+2} \rightarrow E_{i+1} = - (\mu_1 + \lambda_e) e^{-\mu_1(t-t_o)}$$

Aux taux d'arrivée $\lambda'(t)/E_i \longrightarrow E_{i+1}$ correspondent des probabilités d'état conditionnelles $p_{2/1}''(t)$ de la variable aléatoire $I_2(t)$.

Aux taux d'arrivée $\lambda'(t)/E_{i+2} \longrightarrow E_{i+1}$ correspondent des probabilités d'état conditionnelles $p_{2/1}''(t)$ de la variable aléatoire $I_2(t)$.

Si nous considérons le parc dans l'état E_i après une transition quelconque à $t=t_0$ ($E_i \longrightarrow E_{i+1}$ ou $E_{i+2} \longrightarrow E_{i+1}$), les probabilités d'état $p_{2/1}''(t)$ de la variable aléatoire $I_2(t)$ seront comprises respectivement sur les intervalles

$$\left[p_{2/1}''(t)/E_i \longrightarrow E_{i+1}, p_{2/1}''(t)/E_{i+2} \longrightarrow E_{i+1} \right], v_1$$

Si les probabilités de passage $p(E_i \longrightarrow E_{i+1})$ et $p(E_{i+2} \longrightarrow E_{i+1})$, sachant que le parc passe dans l'état E_{i+1} à $t = t_0$, étaient identiques, on aurait :

$$p_{2/1}''(t) = \frac{p_{1/E_{i+2} \longrightarrow E_{i+1}}''(t) + p_{1/E_i \longrightarrow E_{i+1}}''(t)}{2}, v_1$$

Les relations entre $\lambda'(t)$ et $p_{2/1}''(t)$, v_1 n'étant pas linéaires, on n'aura pas, même dans ce cas :

$$p_{2/1}''(t) \longleftrightarrow \lambda'(t) = (i+1) \lambda_e + \frac{\mu_1}{2} e^{-\mu_1(t-t_0)}$$

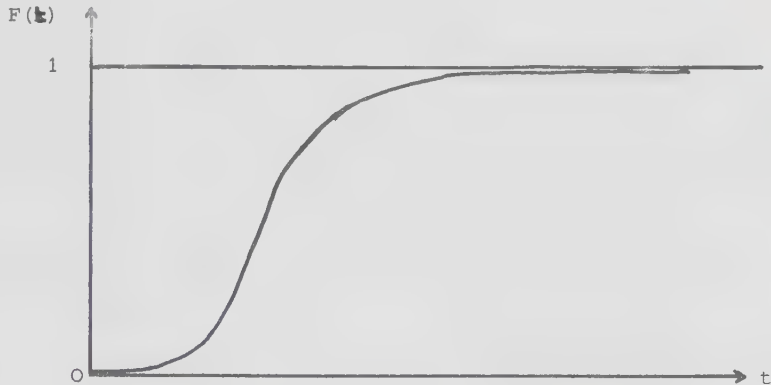
Par contre, on peut toujours affirmer que $p_{2/1}''(t)$ sera comprise entre les deux probabilités conditionnelles

$$p_{2/1}''(t)/E_i \longrightarrow E_{i+1} \quad \text{et} \quad p_{2/1}''(t)/E_{i+2} \longrightarrow E_{i+1}$$

On voit que l'erreur due à la simplification est d'autant plus faible que la dimension du parc est plus grande et le taux μ_1 plus faible.

Remarque : Système dont les stations ne suivent pas une loi de service exponentielle

Supposons que les V.A. "temps de passage" de ces stations obéissent à une loi de probabilité dont la fonction de répartition est définie par :



En reprenant le calcul de $\mu_{12}(t)$ dans la remarque précédente, on voit que le taux de sortie des ensembles arrivés dans le système S_1 après la date t_0 peut s'écrire :

$$\mu_{12}(t) = (i+1) \lambda_e [1 - F(t-t_0)]$$

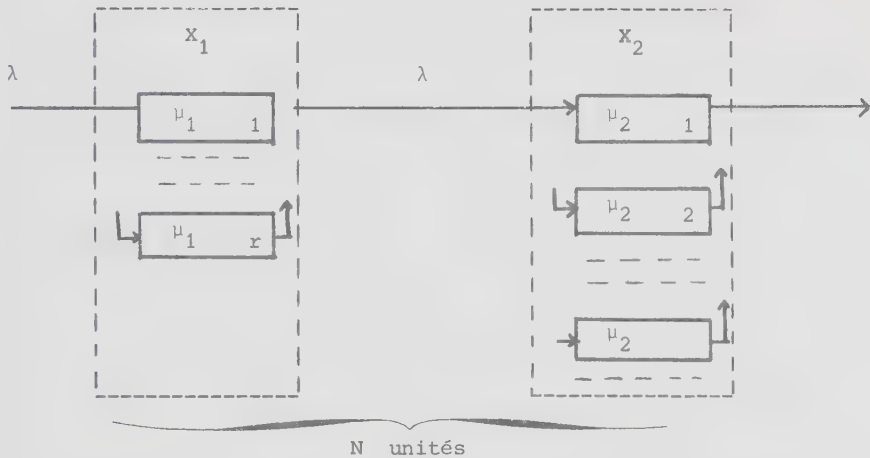
A cause du processus poissonnien des arrivées, le taux de sortie tend vers un régime permanent identique à celui qui existerait si les lois de service étaient exponentielles (avec la même moyenne).

Ce calcul n'est valable que parce qu'il ne peut y avoir de file d'attente dans le sous-système S_1 .

C-III 2/C - Non influence de l'ordre des systèmes S_1, S_2, S_3 sur le taux moyen de remise en service

1/ Premier modèle

Considérons d'abord deux variables aléatoires X_1 et X_2 provenant de deux systèmes différents :



Soit $p_{1,i} = \text{Prob } \{X_1 = i\}$ $i = 0, 1, \dots, \infty$
 $p_{2,j} = \text{Prob } \{X_2 = j\}$ $j = 0, 1, \dots, \infty$
 $p'_{i,j} = \text{Prob } \{X_1 = i, X_2 = j / i+j = N\}$

Les deux systèmes sont caractérisés par leurs états E_{ij}

Nous nous plaçons dans le cas où l'on sait que $i + j = N$.

Le taux de remise en service η_2 d'un tel modèle sera alors donné par la formule :

$$\eta_2 = \sum_{j=1}^{j=N} j \cdot \mu_2 P'_{i,j} \quad \text{avec } i = N-j$$

Chacun des deux systèmes étant classique , on sait déjà que les probabilités de chacun d'eux sont respectivement : (1)

$$\begin{array}{l}
 p_{1_0} = \beta \\
 p_{1_i} = \beta \frac{\psi^i}{i!} \quad \text{si } i \leq r \\
 p_{1_i} = \beta \frac{\psi^i}{r! r^{i-r}} \quad \text{si } i > r \\
 \text{avec } \psi_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 p_{2_0} = e^{-\psi_2} \\
 p_{2_j} = e^{-\psi_2} \frac{\psi_2^j}{j!} \\
 \text{avec } \psi_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}
 \end{array}$$

Ces formules sont relatives à un nombre d'unités illimité.

La probabilité $p'_{i,j}$ s'obtient par une normalisation :

$$\begin{aligned}
 p'_{i,j} &= \frac{p_{1_i} \times p_{2_j}}{\sum_{0} p_{1_i} \times p_{2_j}} \quad \text{telle que } i + j = N \\
 &= \frac{p_{1_i} \times p_{2_j}}{\sum_N}
 \end{aligned}$$

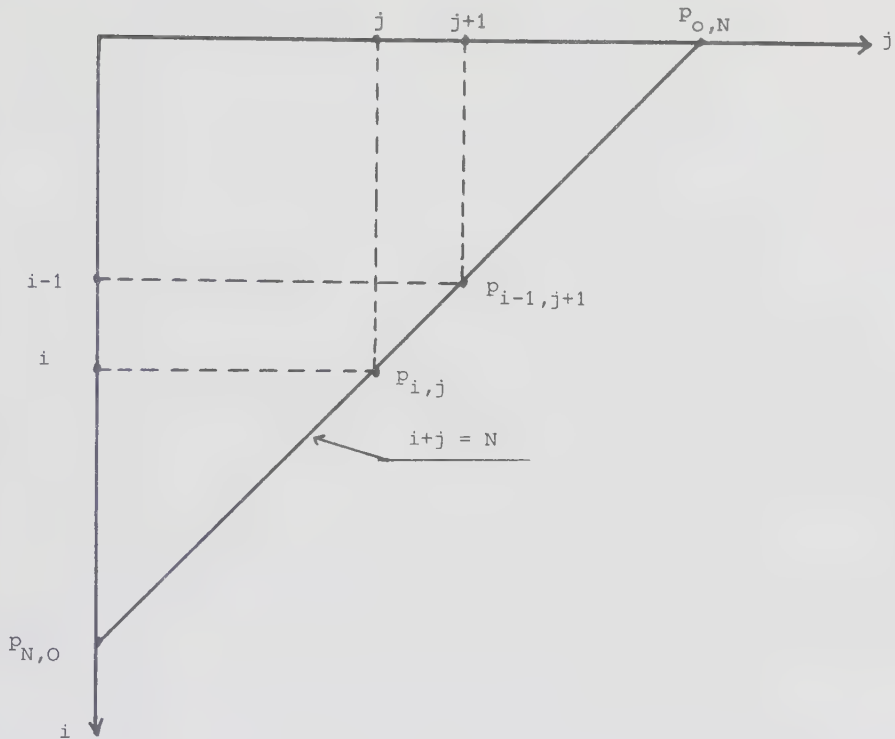
Le terme " $\sum_N$ " garde la même valeur quel que soit $p'_{i,j}$ telle que $i + j = N$. Aussi, pour simplifier l'écriture, nous chercherons la quantité :

$$\sum_N \times \eta_2 = \sum_{j=1}^{j=N} j \cdot \mu_2 p_{1_{N-j}} \times p_{2_j}$$

Appelons " $p_{i,j}$ " le produit " $p_{1_{N-j}} \times p_{2_j}$ "

(1) Afin de simplifier l'écriture, nous ne donnons pas la formule explicite de p_{1_0} , car cela n'est pas nécessaire à la démonstration.

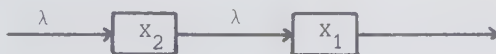
Le graphique suivant montre comment on peut représenter $p_{i,j}$:



On voit immédiatement que pour obtenir " $\sum_N \eta_2^n$ ", on peut multiplier chaque probabilité par la valeur $j \cdot \mu_2$ de chaque colonne. En faisant la somme de toutes les colonnes, on obtient la quantité cherchée.

2/ Deuxième modèle

Nous reprenons le modèle précédent en inversant les deux systèmes :



Les stations à l'intérieur des systèmes restent identiques à celles du modèle précédent.

Cette fois, le taux de remise en service η_1 s'écrit :

$$\eta_1 = \sum_{i=0}^{i=r} i \mu_1 p'_{i,j} + \sum_{i=r+1}^{i=N} r \mu_1 p'_{i,j}, \quad i + j = N$$

soit encore :
$$\sum_N \cdot \eta_1 = \sum_{i=0}^{i=r} i \cdot \mu_1 \cdot p_{i,j} + \sum_{i=r+1}^{i=N} r \cdot \mu_1 \cdot p_{i,j}$$

La représentation graphique précédente reste valable ; cette fois, il faut additionner les probabilités pondérées par $\min(i, r) \times \mu_1$ suivant les lignes i pour obtenir la quantité $\sum_N \cdot \eta_1$

Il faut maintenant démontrer l'égalité $\eta_2 = \eta_1$.

En observant le graphique, on voit que, si l'on peut démontrer l'égalité :

$$\min(i, r) \cdot \mu_1 \cdot p_{i,j} = (j+1) \mu_2 \cdot p_{i-1, j+1} \quad (1)$$

quels que soient i et j , nous aurons démontré que $\eta_1 = \eta_2$ (en se souvenant que : $j \mu_2 = 0$ pour $j = 0$ et $i \mu_1 = 0$ pour $i = 0$).

Or la relation (1) s'écrit :

a) pour $i \leq r$:

$$i \cdot \mu_1 \frac{\psi_1^i}{i!} \cdot e^{-\psi_2} \frac{\psi_2^j}{j!} = (j+1) \cdot \mu_2 \cdot \beta \cdot \frac{\psi_1^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\psi_2} \frac{\psi_2^{j+1}}{(j+1)!}$$

$$\implies 1 = 1$$

b) pour $i > r$

$$r \mu_1 \beta \frac{\psi_1^i}{r! r^{i-r}} \cdot e^{-\psi_2} \frac{\psi_2^j}{j!} = (j+1) \mu_2 \beta \frac{\psi_1^{i-1}}{r! r^{i-1-r}} e^{-\psi_2} \frac{\psi_2^{j+1}}{(j+1)!}$$

$$\Longrightarrow 1 = 1$$

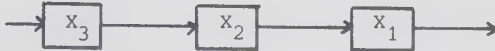
Cette relation est vérifiée $\forall i, j$, donc $n_1 = n_2$

(3) Introduction d'une troisième variable aléatoire

Considérons d'abord les deux modèles suivants :



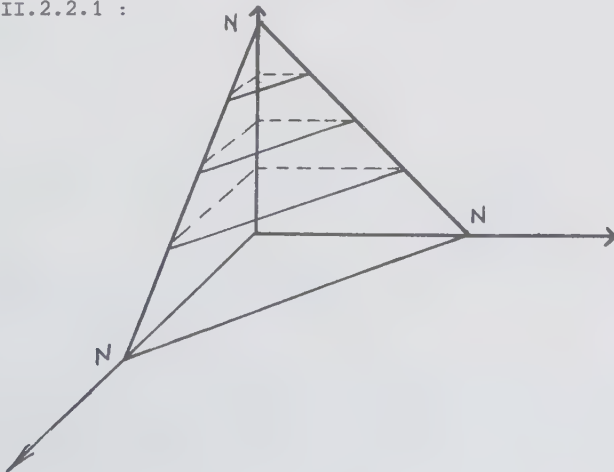
et



Cette fois, les probabilités $p_{i,j,k}$ telles que :

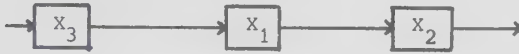
$$p'_{i,j,k} = \text{Prob} \{ X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k \mid i+j+k = N \}$$

pourraient être représentées sur la base d'un tétraèdre identique à celui du paragraphe III.2.2.1 :



Pour chaque ligne horizontale, on peut répéter le raisonnement précédent ; les deux modèles ont donc le même taux de remise en service.

Si nous devions comparer les modèles :



et



il suffirait de refaire le raisonnement sur des plans verticaux.

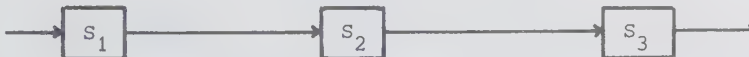
(4) Extension à n systèmes en série

Une permutation quelconque peut toujours se décomposer en une somme de permutations ne mettant en jeu que deux systèmes.

En faisant le raisonnement précédent pour chacune des permutations, on pourrait démontrer l'égalité des taux moyens de remise en service de modèles formés de n systèmes classés dans des ordres différents. Mais cette démonstration n'est pas utile pour l'étude de notre modèle.

C-III 2/D - Réparation par étapes

Jusqu'ici, nous avons considéré le système :



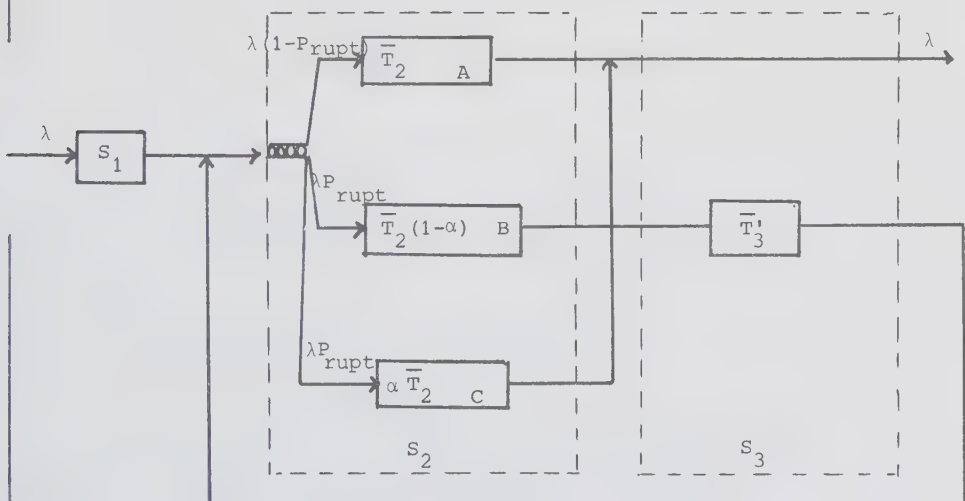
D'après ce schéma, un ensemble ne peut subir qu'une seule fois le phénomène de la file d'attente.

Pour du matériel électronique, la recherche de la panne (diagnostic) est la tâche principale du réparateur ; c'est elle qui est la

plus longue. Si on considère le temps de remplacement des composants comme négligeable devant le temps du diagnostic et si les matériels sortant du sous-système S_3 sont considérés comme prioritaires devant les ensembles arrivant à l'atelier de réparation, le schéma ci-dessus est valable. Mais on peut se demander quelle est la crédibilité des équations précédentes dans le cas contraire.

Examinons le cas où la durée moyenne de recherche de la panne est $\bar{T}_2(1-\alpha)$ et où la durée moyenne du remplacement des composants vaut $\alpha\bar{T}_2$. Supposons aussi, pour l'instant, qu'il n'y ait qu'une seule équipe de réparation et que les ensembles repris après attente pour manque de pièce ne soient pas prioritaires.

Soit " p_{rupt} " la probabilité pour qu'un ensemble quelconque tombe en "attente pour manque de pièce" au cours de la réparation. Le système peut alors se représenter par le schéma suivant :



C'est la même équipe de réparation qui tient les 3 stations A,B,C (supposées exponentielles). Si $p_{rupt} = 0$, on est ramené au premier schéma.

Pour une valeur donnée α , la différence avec le premier schéma sera d'autant plus grande que la valeur de p_{rupt} sera élevée (à la limite, $p_{rupt} = 1$).

Définissons l'état E_1 comme l'état du sous-système S_2 lorsqu'il y a "1" ensembles dans l'atelier de réparation. Le taux d'arrivée dans ce sous-système est $\lambda(1+p_{rupt})$, $\forall 1$.

Cherchons quel sera le taux de sortie correspondant à l'état E_1 . Lorsque "1" est différent de zéro, il y a un ensemble entre les mains de l'équipe de réparation, mais il est soit en A, en B, ou en C.

Soit " $p_{A/A,B,C}$ " la probabilité conditionnelle pour que l'ensemble soit en A sachant qu'il est soit en A, soit en B, soit en C.

On définit de même :

$$p_{B/A,B,C} \quad \text{et} \quad p_{C/A,B,C}$$

Le taux de remise en service est la somme des différents taux μ_A, μ_B, μ_C pondérés par les probabilités conditionnelles :

$$\mu = \mu_A \cdot p_{A/A,B,C} + \mu_B \cdot p_{B/A,B,C} + \mu_C \cdot p_{C/A,B,C}$$

La probabilité $p_{A/A,B,C}$ peut se calculer comme le rapport du temps moyen d'occupation de A par unité de temps sur le temps moyen d'occupation de A ou B ou C par unité de temps.

$$p_{A/A,B,C} = \frac{\lambda_A \cdot \bar{T}_A}{\lambda_A \bar{T}_A + \lambda_B \bar{T}_B + \lambda_C \bar{T}_C}$$

On obtient ainsi :

$$\mu = \frac{\mu_A \cdot \lambda_A \bar{T}_A + \mu_B \cdot \lambda_B \bar{T}_B + \mu_C \cdot \lambda_C \bar{T}_C}{\lambda_A \bar{T}_A + \lambda_B \bar{T}_B + \lambda_C \bar{T}_C}$$

Mais par définition $\mu_i = \frac{1}{\bar{T}_i}$

Donc :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\lambda [(1-p_{\text{rupt}}) + p_{\text{rupt}} + p_{\text{rupt}}]}{\lambda [(1-p_{\text{rupt}}) \bar{T}_2 + p_{\text{rupt}} \cdot \bar{T}_2 (1-\alpha) + p_{\text{rupt}} \cdot \alpha \bar{T}_2]} \\ &= \frac{\lambda (1+p_{\text{rupt}})}{\lambda \cdot \bar{T}_2} \end{aligned}$$

Soit : $\mu = \mu_2 (1 + p_{\text{rupt}})$

Le sous-système S_2 étant toujours représentable par une chaîne de Markov, les probabilités d'états sont données par les mêmes formules qu'en III.2.3 (pour $X = 1$) en remplaçant λ_e par " $\lambda(1+p_{\text{rupt}})$ " et μ_2 par " $\lambda_2(1+p_{\text{rupt}})$ ".

Comme, dans ces dites formules, λ et μ_2 n'interviennent que par leur rapport λ / μ_2 , celui-ci a la même valeur que précédemment et les probabilités d'état sont inchangées.

En résumé, dans le cas où :

- une seule équipe travaille dans l'atelier,
- la file d'attente n'a pas de priorités,

les probabilités d'état de la V.A. I_2 ne dépendent pas de " α ", proportion du temps moyen passé sur le matériel après la réception des pièces par rapport au temps total passé sur le matériel par l'équipe de réparation.

On peut aussi supposer que le matériel peut passer plusieurs fois en "attente d'approvisionnement" avec la probabilité $p_1 + p_2 + \dots + p_i + \dots + p_n$ de tomber au moins une fois en attente d'approvisionnement ; la probabilité de tomber au moins "i" fois étant égale à $p_i + p_{i+1} + \dots + p_n$; la probabilité de tomber n fois étant égale à p_n .

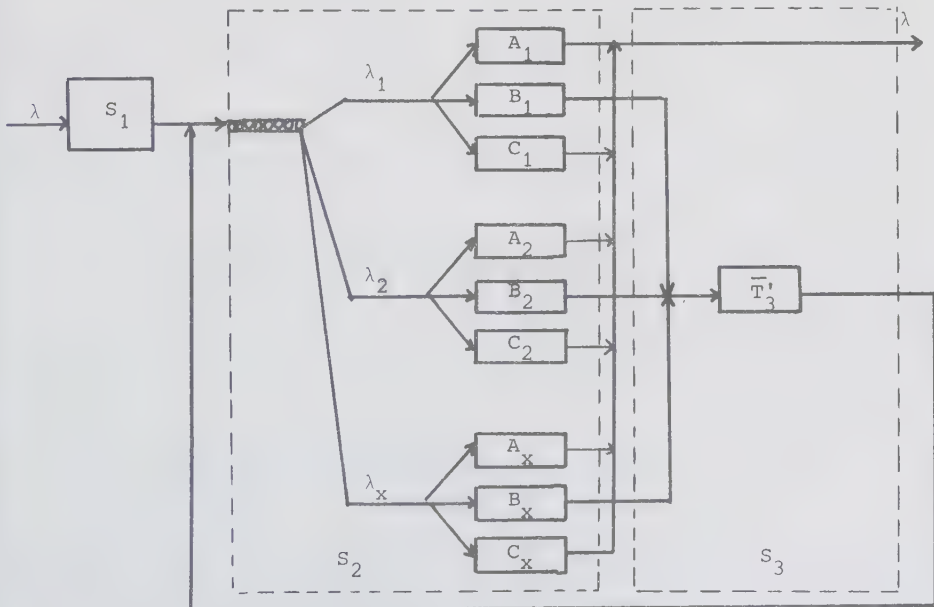
Dans ce cas le taux d'arrivée est $\lambda(1 + p_1 + 2p_2 + \dots + ip_i + \dots + np_n)$.

On décompose cette fois le sous-système en (n+1) stations différentes ; et un raisonnement analogue au précédent permet de trouver :

$$\mu = \mu_2(1 + p_1 + 2p_2 + \dots + ip_i + \dots + np_n)$$

On voit immédiatement que les conclusions précédentes restent valables.

Examinons maintenant le cas où il y a X équipes de réparateurs. Le système peut alors se représenter par le schéma suivant :



Soit :

$$- p_{A_i} / A_i, B_i, C_i$$

$$- p_{B_i} / A_i, B_i, C_i$$

$$- p_{C_i} / A_i, B_i, C_i$$

les probabilités pour que la $i^{\text{ème}}$ équipe traite un sous-ensemble dans une station de type A (respectivement B, C) sachant que cette équipe répare un sous-ensemble.

Ces probabilités pourront s'exprimer comme précédemment :

$$p_{A_i} / A_i, B_i, C_i = \frac{\lambda_{A_i} \bar{T}_A}{\lambda_{A_i} \bar{T}_A + \lambda_{B_i} \bar{T}_B + \lambda_{C_i} \bar{T}_C}, \quad \forall_i$$

etc...

Pour deux équipes i et i' , ces probabilités conditionnelles sont indépendantes. Donc, pour ces deux équipes quelconques, le taux de remise en service de l'ensemble des deux équipes (sachant qu'elles ont chacune un ensemble dans leurs stations) sera :

$$\begin{aligned} \mu_{i,i'} &= \sum_{\{e,f\}} (\mu_e + \mu_f) p_{e/A_i, B_i, C_i} \cdot p_{f/A'_i, B'_i, C'_i} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} e &= A_i, B_i, C_i \\ f &= A'_i, B'_i, C'_i \end{aligned} \\ &= \sum_{\{e,f\}} \left(\frac{\bar{T}_e + \bar{T}_f}{\bar{T}_e \cdot \bar{T}_f} \right) \times \left(\frac{\lambda_e \bar{T}_e \cdot \lambda_f \bar{T}_f}{\lambda_i \cdot \lambda_{i'} \bar{T}_2^2} \right) \end{aligned}$$

En posant $\alpha_e = \frac{\lambda_e}{\lambda_i}$, $\alpha_f = \frac{\lambda_f}{\lambda_{i'}}$ on a encore :

$$\mu_{i,i'} = \sum_{\{e,f\}} (\bar{T}_e + \bar{T}_f) \frac{(\alpha_e \cdot \alpha_f)}{\bar{T}_2^2}$$

De plus, comme : $\bar{T}_A = \bar{T}_{A_i} = \bar{T}_{A'_i}$, $\bar{T}_B = \bar{T}_{B_i} = \bar{T}_{B'_i}$, etc...

$$\alpha_A = \alpha_{A_i} = \alpha_{A'_i}, \quad \alpha_B = \alpha_{B_i} = \alpha_{B'_i}, \quad \text{etc...}$$

On obtient :

$$\mu_{i,i'} = \frac{2 (\alpha_A \bar{T}_A + \alpha_B \bar{T}_B + \alpha_C \bar{T}_C) (\alpha_A + \alpha_B + \alpha_C)}{\bar{T}_2^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Mais : } \alpha_A + \alpha_B + \alpha_C &= (1 - p_{\text{rupt}}) + p_{\text{rupt}} + p_{\text{rupt}} \\ &= 1 + p_{\text{rupt}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \alpha_A \bar{T}_A + \alpha_B \bar{T}_B + \alpha_C \bar{T}_C &= (1 - p_{\text{rupt}}) \bar{T}_2 + p_{\text{rupt}} \bar{T}_2 (1 - \alpha) + p_{\text{rupt}} \alpha \bar{T}_2 \\ &= \bar{T}_2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \mu_{i,i'} = \frac{2 \bar{T}_2 (1 + p_{\text{rupt}})}{\bar{T}_2^2} = 2 \mu_2 (1 + p_{\text{rupt}})$$

Ce taux est valable quel que soit i et i' . On en déduit que, lorsque le sous-système S_2 est dans l'état 2, le taux de remise est $2 \mu_2 (1 + p_{\text{rupt}})$.

D'une façon générale, et toute complication d'écriture mise à part, à un état Z du sous-système ($Z=1,2,\dots,X$), correspondra un taux de remise en service $\mu(Z)$ tel que :

$$\begin{aligned} \mu(Z) &= \frac{Z (\alpha_A \bar{T}_A + \alpha_B \bar{T}_B + \alpha_C \bar{T}_C)^{Z-1} (\alpha_A + \alpha_B + \alpha_C)}{\bar{T}_2^Z} \\ &= Z \mu_2 (1 + p_{\text{rupt}}) \end{aligned}$$

Là encore, comme les taux de transition de la chaîne de Markov n'interviennent dans les probabilités d'état que par leur rapport ; celui-ci conserve la même valeur et les probabilités d'état restent inchangées.

Le raisonnement précédent reste valable si on pose :

$$e = 1_i, 2_i, \dots, (n+1)_i \quad f = 1'_i, 2'_i, \dots, (n+1)'_i$$

Ce qui veut dire que les probabilités d'état restent encore inchangées si on suppose qu'un même ensemble peut tomber n fois en "attente de pièce".

III.2.7 : Recherche de μ_3

III.2.7.1 : Introduction

Nous savons que μ_3 est l'inverse d'un temps probable d'attente pour manque de pièce T_3 :

$$\mu_3 = \frac{1}{T_3}$$

Nous aurons donc résolu notre problème si nous réussissons à déterminer T_3 en fonction des variables de décision. Ces variables sont les paramètres de gestion du stock et sont spécifiques du modèle choisi -car il existe plusieurs façons de gérer un stock- Nous voulons donc exprimer T_3 en fonction des variables de décision de chacun des modèles de gestion de façon à se réserver le choix du modèle -choix qui se fera aussi selon un critère économique-.

Les modèles examinés sont tous "à point de commande", c'est-à-dire que les commandes sont passées lorsque le niveau du stock "disponible" atteint une valeur "r" (ou une valeur d'un ensemble prédéterminé), objet de l'étude. Ces modèles nécessitent de suivre le stock demande par demande (système à information parfaite).

Il existe aussi des modèles à "calendrier" (la commande est faite à date fixe) mais dans la réalité, les modèles à "point de commande" prédominent.

Nous verrons qu'il existe des points communs entre les différents modèles étudiés car en fait, il n'existe qu'un seul modèle général à point de commande.

III.2.7.2 : Etude du modèle à point de commande unique $\langle Q, r \rangle$

III.2.7.2.1 : Présentation du modèle

On commande une quantité Q chaque fois que le niveau r du stock est atteint.

Dans notre cas, les demandes faites pendant une rupture de stock sont différées.

Il n'y a jamais plus d'une commande en attente ; c'est une hypothèse restrictive nécessaire pour la mise en équation du problème. Mais il faut remarquer que dans la réalité (si le système de stock est à point de

commande unique), les valeurs des paramètres sont telles que la probabilité pour qu'il y ait plus de $(Q - r)$ demandes pendant la rupture de stock est très faible.

III.2.7.2.2 : Durée moyenne de rupture de stock

Appelons "niveau net" le niveau disponible du stock diminué des demandes différées éventuelles.

Représentons le niveau net du stock (supposé continu) par la fig. 01. :

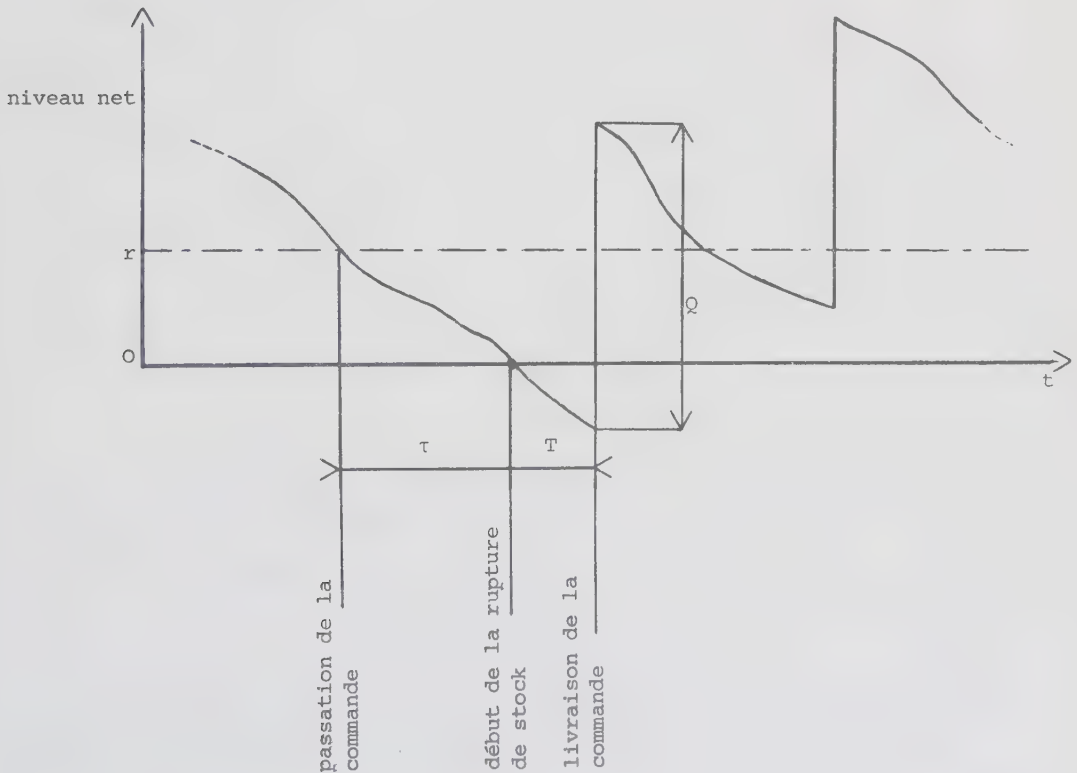


fig. 01.

La distribution de la demande permet de connaître la distribution du délai " τ " pour passer du niveau " r " au niveau zéro (début de la rupture de stock). Soit $f(r, \tau)$ densité de probabilité de ce délai.

Dans notre cas, la demande sera unitaire et poissonnienne ; d'après les calculs reproduits en annexe A-III 2722.

$$f(r, \tau) = \frac{\lambda (\lambda \tau)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda \tau}$$

où λ est le taux de la demande.

A cette densité correspond la probabilité :

$$\left[\frac{\lambda (\lambda \tau)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda \tau} \right] \cdot d\tau$$

On reconnaît la fonction densité d'une loi gamma d'ordre r .

Soit $g(\tau)$ la fonction densité de la loi du délai de livraison

et $G(\tau) = \int_0^\tau g(u) \cdot du$ sa fonction de répartition.

Alors la distribution marginale de la durée de rupture de stock T par délai de livraison sera :

$$h'_r(T) = \begin{cases} = \int_0^\infty f(r, \tau) \cdot g(\tau+T) \cdot d\tau & \text{pour } T > 0 \\ = \int_0^\infty f(r, \tau) \cdot G(\tau) \cdot d\tau & \text{pour } T = 0 \end{cases}$$

En effet, pour $T = 0$, la livraison de la commande a lieu sans que le niveau zéro soit atteint.

On en déduit une durée moyenne $\bar{T}'_r$:

$$\bar{T}'_r = \int_0^\infty u \cdot h'_r(u) \cdot du$$

$\bar{T}'_r$ est le temps moyen de la rupture du stock à la fin d'un cycle quelconque appartenant à l'ensemble de tous les cycles (avec ou sans rupture).

La distribution marginale de la durée de rupture de stock T par délai de livraison sachant qu'il y aura rupture de stock n'est pas égale à $h'_r(T)$. Soit $h_r(T)$ cette nouvelle distribution : celle-ci s'écrit :

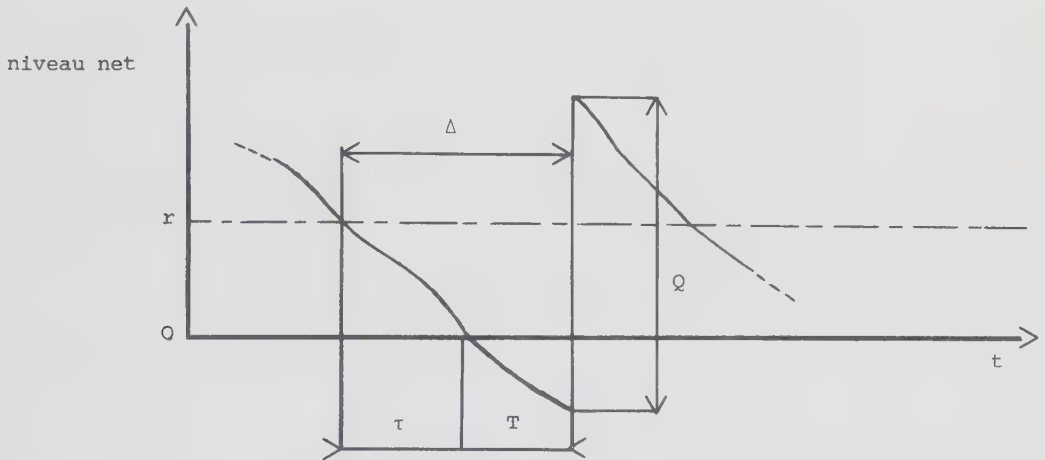
$$h_r(T) = \frac{h'_r(T)}{P_{\text{rupt}}}$$

où p_{rupt} = probabilité de la rupture de stock à la fin d'un cycle quelconque.

Soit :

$$h_r(T) = \frac{h'_r(T)}{1 - h'_r(0)} = \frac{\int_0^\infty f(r, \tau) \cdot g(\tau+T) \cdot d\tau}{1 - \int_0^\infty f(r, u) \cdot G(u) \cdot du}$$

Cas particulier n° 1 : délai de livraison constant de valeur Δ



On a immédiatement pour $r \neq 0$:

$$h'_r(T) = f(r, (\Delta-T)) \text{ pour } 0 < T \leq \Delta$$

d'où la valeur :

$$\bar{T}'_r = \int_0^\Delta u \cdot f(r, (\Delta-u)) \cdot du$$

Posons $v = \Delta - u$

$$\bar{T}'_r = \int_0^\Delta (\Delta-v) \cdot f(r, v) \cdot dv = \int_0^\Delta \lambda (\Delta-v) \frac{(\lambda v)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda v} \cdot dv$$

ou :

$$\bar{T}'_r = \Delta \int_0^\Delta \lambda \frac{(\lambda v)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda v} \cdot dv - \int_0^\Delta \frac{(\lambda v)^r}{(r-1)!} e^{-\lambda v} \cdot dv$$

En posant :

$$P(r, \lambda \Delta) = \sum_{i=r}^{i=\infty} p(i, \lambda \Delta)$$

on obtient, d'après le complément E-III 2722 :

$$T'_r = \Delta P(r, \lambda \Delta) - \frac{r}{\lambda} P(r+1, \lambda \Delta)$$

Dans le même complément C-III 2722, on a démontré que :

$$P_{\text{rupt}} = 1 - \int_0^{\infty} f(r, u) \cdot G(u) \cdot du = P(r, \lambda \Delta)$$

lorsque le délai de livraison est constant de valeur Δ .

Ce qui permet d'obtenir l'expression de la moyenne T_r :

$$\bar{T}_r = \frac{\bar{T}'_r}{P(r, \lambda \Delta)} = \Delta - \frac{r}{\lambda} \frac{P(r+1, \lambda \Delta)}{P(r, \lambda \Delta)} = \Delta - \frac{r}{\lambda} \left(1 - \frac{\frac{(\lambda \Delta)^r}{r!} e^{-\lambda \Delta}}{1 - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\lambda \Delta)^j}{j!} e^{-\lambda \Delta}} \right)$$

Remarque : pour $r = 0$, on a : $\bar{T}_0 = \Delta$

Cas particulier n° 2 : délai de livraison exponentiel :

on a alors :

$$g(\tau) = \mu \cdot e^{-\mu \tau} d\tau$$

d'où :

$$\begin{aligned} h'_r(T) &= \int_0^{\infty} f(r, \tau) \cdot g(\tau+T) \cdot d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \lambda \frac{(\lambda \tau)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda \tau} \cdot \mu \cdot e^{-\mu(\tau+T)} d\tau \\ &= \frac{\lambda^r \cdot \mu \cdot e^{-\mu T}}{(\lambda + \mu)^r} \int_0^{\infty} (\lambda + \mu) \frac{[(\lambda + \mu) \tau]^{r-1}}{(r-1)!} e^{-(\lambda + \mu) \tau} d\tau \end{aligned}$$

On reconnaît sous l'intégrale la fonction densité d'une loi gamma d'ordre r ; on a donc :

$$h'_r(T) = \frac{\lambda^r \cdot \mu}{(\lambda + \mu)^r} e^{-\mu T}$$

Par définition, la valeur $\bar{T}'_r$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{T}'_r &= \frac{\lambda^r}{(\lambda + \mu)^r} \int_0^{\infty} \mu \cdot t \cdot e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{\lambda^r}{\mu (\lambda + \mu)^r} \int_0^{\infty} \mu \cdot (\mu t) \cdot e^{-\mu t} dt \end{aligned}$$

On reconnaît encore une fonction densité de loi gamma (d'ordre 2).

Donc :

$$\overline{T}_r' = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^r$$

Dans le complément C-III 2722, on a démontré que, dans le cas d'un délai de livraison exponentiel :

$$\int_0^{\infty} f(r, u) \cdot G(u) \cdot du = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^r$$

ce qui permet d'écrire :

$$\overline{T}_r = \frac{\overline{T}_r'}{1 - \int_0^{\infty} f(r, u) \cdot G(u) \cdot du} = \frac{1}{\mu}$$

On constate que $\overline{T}_r$ est indépendant de r ; ce résultat, surprenant au premier abord, devient plausible si on se souvient que, pour un phénomène de Poisson, l'arrivée d'un événement est indépendante du moment où commence l'observation (cf. remarque de l'annexe A-III 2721).

Cas particulier n° 3 : délai suivant une loi gamma d'ordre $(\alpha + 1)$.

En partant de :

$$g(\tau) = \frac{\beta(\beta\tau)}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-\beta\tau}$$

on a démontré dans le complément C-III 2722 que, si α est entier, la valeur $\overline{T}_r'$ peut s'écrire :

$$\overline{T}_r' = \frac{\lambda}{\beta^2} \left\{ \sum_{p=0}^{p=\alpha} (p+1) \cdot b_N \left[(r-1) ; (\alpha+1-p), \beta/(\lambda+1) \right] \right\}$$

On a démontré dans le même complément que, dans le cas où α est entier :

$$\int_0^{\infty} f(r, u) \cdot G(u) \cdot du = 1 - \sum_{j=0}^{j=\alpha} \frac{\lambda^r \cdot \beta^j \cdot (r+j-1)!}{(r-1)! j! (\lambda+\beta)^{r+j}}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\overline{T}_r = \frac{\overline{T}_r'}{1 - \int_0^{\infty} f(r, u) \cdot G(u) \cdot du} = \frac{\overline{T}_r'}{\sum_{j=0}^{j=\alpha} \frac{\lambda^r \cdot \beta^j \cdot (r+j-1)!}{(r-1)! j! (\lambda+\beta)^{r+j}}}$$

$\overline{T}_r'$ étant défini par la formule ci-dessus.

C.III.2.7.2.2 - Compléments

A) Calcul de $\overline{T}'_r$ - cas particulier n° 1

$$\overline{T}'_r = \Delta \int_0^{\Delta} \lambda \frac{(\lambda v)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda v} dv - \int_0^{\Delta} \frac{(\lambda v)^r}{(r-1)!} e^{-\lambda v} dv$$

Soit :

$$\overline{T}_1 = \int_0^{\Delta} \lambda \frac{(\lambda v)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda v} dv$$

Posons $x = \lambda v$:

$$\overline{T}_1 = \int_0^{\lambda \Delta} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} e^{-x} dx$$

On sait qu'en intégrant par partie :

$$\begin{aligned} \overline{T}_1 &= \left[\frac{x^r}{r!} e^{-x} \right]_0^{\lambda \Delta} + \int_0^{\lambda \Delta} \frac{x^r}{r!} e^{-x} dx \\ \overline{T}_1 &= \left[\frac{x^r}{r!} e^{-x} \right]_0^{\lambda \Delta} + \left[\frac{x^{r+1}}{(r+1)!} e^{-x} \right]_0^{\lambda \Delta} + \dots \end{aligned}$$

on obtient :

$$\overline{T}_1 = P(r, \lambda \Delta)$$

Soit :

$$\overline{T}_2 = \int_0^{\Delta} \frac{(\lambda v)^r}{(r-1)!} e^{-\lambda v} dv = \frac{r}{\lambda} \int_0^{\lambda \Delta} \frac{x^r}{r!} e^{-x} dx = \frac{r}{\lambda} P((r+1), \lambda \Delta)$$

Comme $\overline{T}'_r = \Delta \overline{T}_1 - \overline{T}_2$, on obtient :

$$\overline{T}'_r = \Delta P(r, \lambda \Delta) - \frac{r}{\lambda} P(r+1, \lambda \Delta)$$

Calcul de $p_{\exists \text{ rupt}}$:

La probabilité pour qu'il existe une rupture de stock en fin de cycle est la probabilité pour qu'il y ait au moins "r" demandes sur l'intervalle de temps $[0, \Delta]$:

$$p_{\exists \text{ rupt}} = 1 - \sum_{i=0}^{i=r-1} p(i, \lambda \Delta) = P(r, \lambda \Delta)$$

B) Calcul de $\int_0^{\infty} f(r, \tau) \cdot G(\tau) \cdot d\tau$, dans le cas d'une loi de livraison exponentielle.

Si $g(\tau)$ est la fonction densité de la loi du délai de livraison :

$$G(\tau) = \int_0^{\tau} g(u) \cdot du = \int_0^{\tau} \mu \cdot e^{-\mu u} du$$

$$= 1 - e^{-\mu \tau}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(r, \tau) \cdot G(\tau) \cdot d\tau &= \int_0^{\infty} f(r, \tau) \cdot (1 - e^{-\mu \tau}) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} f(r, \tau) \cdot d\tau - \frac{\lambda^r}{(\lambda + \mu)^r} \int_0^{\infty} (\lambda + \mu) \frac{[(\lambda + \mu) \tau]^{r-1}}{(r-1)!} e^{-(\lambda + \mu) \tau} d\tau \\ &= 1 - \frac{\lambda^r}{(\lambda + \mu)^r} \end{aligned}$$

C) Calcul de $\overline{T}'_r$; cas particulier n° 3 :

Pour $r \geq 1$, on a :

$$h'_r(T) = \int_0^{\infty} \lambda \frac{(\lambda \tau)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda \tau} \cdot \beta \frac{[\beta(\tau+T)]^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-\beta(\tau+T)} d\tau$$

ou

$$h'_r(T) = \frac{\lambda^r \beta^{\alpha+1} e^{-\beta T}}{(r-1)! \Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} \tau^{r-1} (\tau+T)^{\alpha} e^{-(\lambda+\beta)\tau} d\tau$$

Dans le cas où α est un entier :

$$(\tau+T)^{\alpha} = \tau^{\alpha} + \binom{\alpha}{1} T \cdot \tau^{\alpha-1} + \dots + \binom{\alpha}{p} T^p \cdot \tau^{\alpha-p} + \dots + \binom{\alpha}{\alpha} T^{\alpha}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} h'_r(T) &= \frac{\lambda^r \beta^{\alpha+1} e^{-\beta T}}{(r-1)! \alpha!} \left\{ \sum_{p=0}^{p=\alpha} \binom{\alpha}{p} T^p \int_0^{\infty} \tau^{r+\alpha-p-1} e^{-(\lambda+\beta)\tau} d\tau \right\} \\ &= \frac{\lambda^r \beta^{\alpha+1} e^{-\beta T}}{(r-1)! \alpha!} \left\{ \sum_{p=0}^{p=\alpha} \binom{\alpha}{p} T^p \frac{(r+\alpha-p-1)!}{(\lambda+\beta)^{r+\alpha-p}} \right\} \end{aligned}$$

D'où la moyenne :

$$\overline{T}'_r = \int_0^{\infty} T \cdot h'_r(T) \cdot dT$$

$$= \frac{\lambda^r \beta^{\alpha+1}}{(r-1)! \alpha!} \left\{ \sum_{p=0}^{p=\alpha} \binom{p}{\alpha} \frac{(r+\alpha-p-1)!}{(\lambda+\beta)^{r+\alpha-p}} \int_0^\infty T^{p+1} e^{-\beta T} dT \right\}$$

$$= \frac{\lambda^r \beta^{\alpha+1}}{(r-1)! \alpha!} \left\{ \sum_{p=0}^{p=\alpha} \binom{p}{\alpha} \frac{(r+\alpha-p-1)!}{(\lambda+\beta)^{r+\alpha-p}} \times \frac{(p+1)!}{\beta^{p+2}} \right\}$$

ou encore :

$$\overline{T}'_r = \frac{\lambda^r \beta^{\alpha+1}}{(r-1)! \alpha!} \left\{ \sum_{p=0}^{p=\alpha} \frac{\alpha!}{p! (\alpha-p)!} \frac{(r+\alpha-p-1)!}{(\lambda+\beta)^{r+\alpha-p}} \times \frac{(p+1)!}{\beta^{p+2}} \right\}$$

en simplifiant :

$$\overline{T}'_r = \frac{\lambda}{\beta^2} \left\{ \sum_{p=0}^{p=\alpha} (p+1) \times \frac{(r+\alpha-p-1)!}{(r-1)! (\alpha-p)!} \times \frac{\beta^{\alpha-p+1}}{(\lambda+\beta)^{\alpha-p+1}} \times \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\right)^{r-1} \right\}$$

ou encore :

$$\overline{T}'_r = \frac{\lambda}{\beta^2} \left\{ \sum_{p=0}^{p=\alpha} (p+1) \cdot b_N [(r-1) ; (\alpha-p+1), \beta/(\lambda+\beta)] \right\}$$

Pour $r = 0$, on aura :

$$h'_0(T) = \frac{\beta (\beta T)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-\beta T} dT$$

Soit :

$$\overline{T}'_0 = \int_0^\infty \beta \tau \cdot \frac{(\beta \tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-\beta \tau} d\tau$$

Soit :

$$\overline{T}'_0 = \frac{\alpha+1}{\beta}$$

Calcul de p_{rupt} :

$$(p_{\text{rupt}})_r = \int_0^\infty f(r, \tau) \cdot G(\tau) \cdot d\tau$$

On a immédiatement, d'après les calculs de A) :

$$G(\tau) = \int_0^\tau \frac{\beta (\beta \tau)}{(\alpha+1)!} e^{-\beta \tau} d\tau = P(\alpha+1, \beta \tau)$$

d'où

$$(p_{\text{rupt}})_r = \int_0^\infty \frac{\lambda (\lambda \tau)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot e^{-\lambda \tau} \cdot P(\alpha+1, \beta \tau) d\tau$$

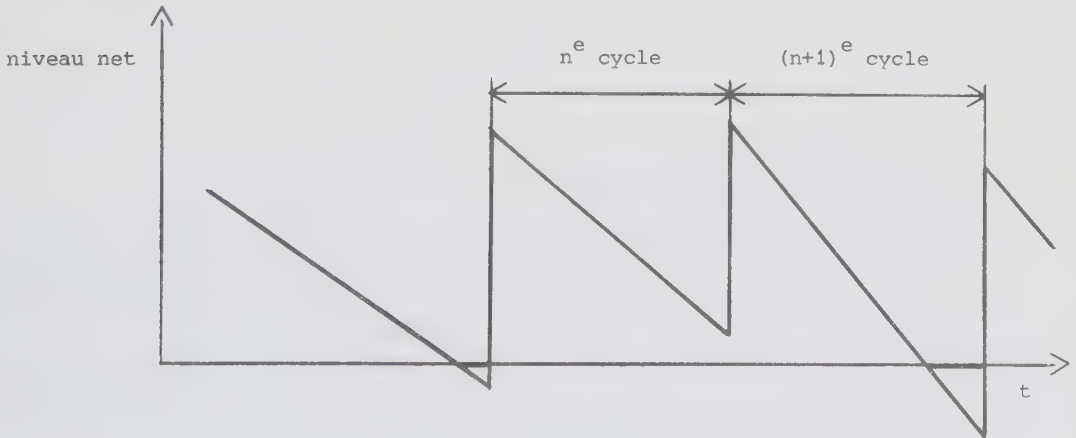
$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda (\lambda \tau)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda \tau} \left[1 - \sum_{j=0}^{j=\alpha} p(j, \beta \tau) \right] \cdot d\tau \\
 &= 1 - \sum_{j=0}^{j=\alpha} \frac{\lambda^r \beta^j (r+j-1)!}{(r-1)! j! (\lambda+\beta)^{r+j}} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{(\lambda+\beta)^{r+j-1} [(\lambda+\beta)\tau]^{r+j-1}}{(r+j-1)!} e^{-(\lambda+\beta)\tau} d\tau}_{=1} \\
 &= 1 - \sum_{j=0}^{j=\alpha} \frac{\lambda^r \beta^j (r+j-1)!}{(r-1)! j! (\lambda+\beta)^{r+j}}
 \end{aligned}$$

Soit :

$$(p_{\text{rupt}})_r = \sum_{j=0}^{j=\alpha} \frac{\lambda^r \cdot \beta^j \cdot (r+j-1)!}{(r-1)! j! (\lambda+\beta)^{r+j}}$$

III.2.7.2.3 : Probabilité de rupture de stock.

La valeur $\bar{T}'_r$ que nous venons de définir représente la durée moyenne de rupture de stock au cours d'un cycle :



La durée moyenne d'un cycle sera :

$$\bar{D} = \frac{Q}{\lambda}$$

Donc la probabilité de rupture de stock vaudra :

$$p_{\text{rupt}} = \frac{\bar{T}'_r}{\bar{D}} = \bar{T}'_r \times \frac{\lambda}{Q}$$

On peut remarquer que, si $\bar{T}'_r$ ne dépendait que de r , p_{rupt} dépend à la fois de r et de Q .

Cas particuliers :

Délai de livraison constant -

$$\text{Rappel : } \overline{T}'_r = \Delta P(r, \lambda \Delta) - \frac{r}{\lambda} P(r+1, \lambda \Delta)$$

On a immédiatement :

$$P_{\text{rupt}} = \frac{\lambda \Delta}{Q} P(r, \lambda \Delta) - \frac{r}{Q} P(r+1, \lambda \Delta)$$

Délai de livraison exponentiel -

$$\overline{T}'_r = \frac{1}{\mu \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)^r}$$

Donc :

$$P_{\text{rupt}} = \frac{\lambda}{\mu Q \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)^r}$$

Délai suivant une loi gamma d'ordre $(\alpha+1)$.

Pour α entier :

$$\overline{T}'_r = \frac{1}{Q} \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2 \left\{ \sum_{p=0}^{p=\alpha} (p+1) \cdot b_N \left[(r-1) ; (\alpha-p+1), \beta/(\beta+\lambda) \right] \right\}$$

III.2.7.2.4 : Temps moyen d'attente de la pièce.

Si on considère l'ensemble des demandes qui arrivent pendant qu'il y a **rupture** de stock, le temps moyen d'attente est $\frac{\overline{T}_r}{2}$: (en effet la demande qui crée la rupture de stock est satisfaite).

Mais, pour l'ensemble des demandes de pièces, le temps moyen d'attente de la pièce est :

$$\overline{T}_3 = \frac{\overline{T}_r}{2} \times P_{\text{rupt}} = \frac{\overline{T}_r}{2} \times \frac{\lambda}{Q} \times \overline{T}'_r$$

III.2.7.2.5 : Influence de la loi de livraison.

La détermination de la loi de livraison réelle étant un problème difficile, il peut être intéressant d'examiner la variation d'un résultat en fonction du type de la loi de livraison, lorsque la distribution garde la même moyenne quel que soit le type de la loi.

Nous avons comparé les deux cas suivants : délai constant et délai à distribution exponentielle.

Rappels :

- loi exponentielle

$$(\overline{T}'_r)_e = \frac{1}{\mu(1 + \mu/\lambda)^r}, \quad (\overline{T}_r)_e = \frac{1}{\mu}$$

- loi constante

$$(\overline{T}'_r)_c = \Delta P(r, \lambda\Delta) - \frac{r}{\lambda} P(r+1, \lambda\Delta)$$

$$(\overline{T}_r)_c = \Delta - \frac{r}{\lambda} \frac{P(r+1, \lambda\Delta)}{P(r, \lambda\Delta)}$$

Nous comparons ces quantités lorsque $\mu = \frac{1}{\Delta}$

Posons :

$$F_{1_r} = \frac{(\overline{T}_r)_c}{(\overline{T}_r)_e}$$

$$F_{2_r} = \frac{(P_{rupt})_c}{(P_{rupt})_e} = \frac{(\overline{T}'_r)_c}{(\overline{T}'_r)_e}$$

$$F_{3_r} = \frac{(\overline{T}_3)_c}{(\overline{T}_3)_e}$$

Les fonctions F_{1_r} , F_{2_r} , F_{3_r} , sont représentées (en fonction de $\psi = \frac{\mu}{\lambda}$) pour différentes valeurs de r . (planches P3/VII, P3/VIII, P3/IX).

Le temps réduit $(\overline{T}_r)_c \times \frac{1}{\Delta}$ est égal à F_{1_r} puisque $(\overline{T}_r)_e = \frac{1}{\mu} = \Delta$.

On constate que l'influence de la loi de livraison est d'autant plus grande que r et $\psi = \mu/\lambda$ sont élevés.

L'examen de la planche P3/IX semble révéler que la valeur F_{3_r} ne tend pas vers zéro lorsque ψ tend vers l'infini. Dans le complément suivant, on montre que :

$$F_{3_r}(\psi) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} \frac{1}{(r+1)! (r+1)}$$

ainsi que :

$$F_{1_r}(\psi) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} \frac{1}{(r+1)}$$

$$F_{2_r}(\psi) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} \frac{1}{(r+1)!}$$

C.III.2.7.2.5 - Limite $F'_{3_r}(\psi)$ lorsque $\psi \rightarrow \infty$

Posons $1 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\psi}$

Et soit les temps réduits :

$$\left. \begin{aligned} T'_{1_r} &= \frac{1^r}{(1+1)^r} \\ T_{1_r} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ pour la loi exponentielle.}$$

$$\left. \begin{aligned} T'_{2_r} &= P(r, 1) - \frac{r}{1} P(r+1, 1) \\ T_{2_r} &= 1 - \frac{r}{1} \frac{P(r+1, 1)}{P(r, 1)} \end{aligned} \right\} \text{ pour la loi constante.}$$

On a toujours :

$$F'_{3_r} = \frac{T'_{1_r} \times T_{1_r}}{T'_{2_r} \times T_{2_r}}$$

Cherchons la valeur limite de T'_{2_r} lorsque $1 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} T'_{2_r} &= e^{-1} \left(\frac{1^r}{r!} + \frac{1^{r+1}}{(r+1)!} + \dots \right) - \frac{r}{1} \left(\frac{1^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{1^{r+2}}{(r+2)!} + \dots \right) \\ &= e^{-1} \left[\frac{1^r}{r!} \left(1 - \frac{r}{r+1} \right) + \frac{1^{r+1}}{(r+1)!} \left(1 - \frac{r}{r+1} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

si $1 \rightarrow 0$

$$T'_{2_r} = e^{-1} \left(\frac{1^r}{(r+1)!} + \varepsilon(1) \right)$$

$$= \frac{1^r}{(r+1)!} + \varepsilon'(1)$$

De même, cherchons la valeur limite de T_{2_r} pour $1 \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} T_{2_r} &= 1 - \frac{r}{1} \frac{\left(\frac{1^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{1^{r+2}}{(r+2)!} + \dots \right)}{\left(\frac{1^r}{r!} + \frac{1^{r+1}}{(r+1)!} + \dots \right)} \\ &= 1 - \frac{r}{1} \frac{\left(\frac{1}{(r+1)} + \frac{1^2}{(r+1)(r+2)} + \dots \right)}{\left(1 + \frac{1}{(r+1)} + \dots \right)} \end{aligned}$$

Si $l \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} T_{2_r} &= 1 - \frac{r}{1} \frac{\left(\frac{1}{(r+1)} + \theta(1) \right)}{(1 + \theta'(1))} \\ &= 1 - \frac{r}{1} \left(\frac{1}{(r+1)} + \theta''(1) \right) \\ &= \frac{1}{r+1} + \theta'''(1) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{T_{1_r}'}{T_{2_r}'} \xrightarrow{l \rightarrow 0} \frac{1}{(r+1)!} \quad (\text{mais } F_{2_r} = \frac{T_{1_r}'}{T_{2_r}'})$$

$$\frac{T_{1_r}}{T_{2_r}} \xrightarrow{l \rightarrow 0} \frac{1}{(r+1)} \quad (\text{mais } F_{1_r} = \frac{T_{1_r}}{T_{2_r}})$$

Soit

$$F_{3_r}(1) \xrightarrow{l \rightarrow 0} \frac{1}{(r+1)! (r+1)}$$

III.2.7.3 : Etude du modèle $\langle Q = 1, R \rangle$

III.2.7.3.1 : Présentation du modèle.

On suppose encore que la demande est unitaire. A chaque demande, on recommande la pièce ($Q = 1$).

Si le niveau des ressources est défini comme la somme du niveau du stock et de la quantité commandée, le niveau des ressources reste constant ; soit R ce niveau.

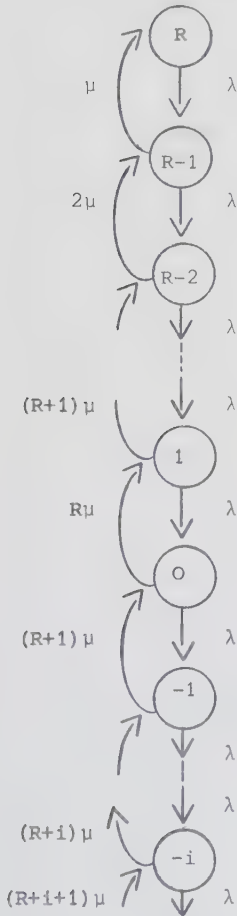
Si une demande arrive pendant que le stock disponible est nul, cette demande, différée, provoque la commande d'une unité.

On peut prévoir que ce modèle sera utilisé dans le cas de pièces ayant un prix unitaire très élevé ou dans le cas d'une très faible demande.

III.2.7.3.2 : Durée probable de rupture de stock

III.2.7.3.2.1 : Cas où le délai de livraison suit une distribution exponentielle.

Si le niveau net est défini comme le niveau disponible diminué des éventuelles demandes différées, l'état du niveau net peut être représenté par une chaîne de Markov (fig. III.2.7.3.2.1).



Le stock est dans l'état "-i"

($i = 1, \dots, \infty$) à l'instant t lorsqu'il y a i demandes différées à l'instant t .

La probabilité pour que le système passe de l'état j à l'état $j + 1$ sur l'intervalle $[t, t + dt]$ est égale à la probabilité pour qu'une commande soit livrée pendant ce même intervalle. Si on admet que les livraisons peuvent se doubler, la probabilité est : $(R - j) \mu \cdot dt$.

La probabilité pour que le système passe de l'état j à l'état $(j - 1)$ dans l'intervalle $[t, t + dt]$ est égale à la probabilité pour qu'il arrive une demande sur l'intervalle $[t, t + dt]$; c'est donc $\lambda \cdot dt$.

On sait déjà qu'il ne peut se produire qu'un seul événement poissonnien sur l'intervalle $[t, t + dt]$; par conséquent seules les transitions aux états adjacents sont possibles.

Par analogie avec les systèmes définis au chapitre 2, on en déduit immédiatement les probabilités d'état :

Fig. III.2.7.3.2.1

$$(1) \quad p_i = p \left(R-i, \frac{\lambda}{\mu} \right) \quad i = R, R-1, \dots, 0, \dots, -\infty$$

III.2.7.3.2.2 : Cas où le délai de livraison suit une distribution quelconque.

Nous avons trouvé dans [9] la démonstration (due à Takács) selon laquelle la probabilité d'état donnée en (1) est valable quelle que soit la distribution du délai de livraison. Le fait que la commande soit unitaire ($Q = 1$) est une condition nécessaire. Nous reproduisons cette démonstration dans l'annexe III.2.7.3.2.2.

III.2.7.3.2.3 : Détermination du temps moyen d'attente pour manque de pièce.

A partir des probabilités p_i définies précédemment, on peut trouver le nombre probable de demandes différées à un instant t quelconque :

$$B(R) = \sum_{i=-1}^{i=-\infty} -i \cdot p_i$$

Mais en remarquant que $B(R)$ représente encore le nombre moyen d'"unités x temps" différées sur l'intervalle de temps unité, on peut écrire :

$$\lambda \cdot \bar{T}_{3R} = B(R)$$

$$\text{Soit : } \bar{T}_{3R} = \frac{B(R)}{\lambda}$$

On rappelle que $B(R)$ peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} B(R) &= \sum_{u=R}^{u=\infty} (u-R) p(u, \lambda/\mu) \\ &= \frac{\lambda}{\mu} P(R-1, \lambda/\mu) - R \cdot P(R, \lambda/\mu) \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \left[1 - \sum_{v=0}^{R-2} p(v, \lambda/\mu) \right] - R \left[1 - \sum_{v=0}^{R-1} p(v, \lambda/\mu) \right] \end{aligned}$$

Soit :

$$\bar{T}_{3R} = \frac{1}{\mu} \left[1 - \sum_{v=0}^{R-2} p(v, \lambda/\mu) \right] - \frac{R}{\lambda} \left[1 - \sum_{v=0}^{R-1} p(v, \lambda/\mu) \right]$$

III.2.7.4 : Etude du modèle $\langle Q, M \rangle$

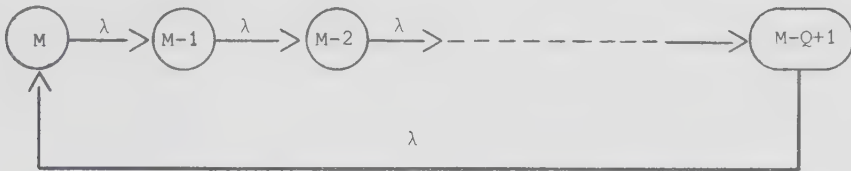
III.2.7.4.1 : Présentation du modèle

On suppose encore que la demande est unitaire. Le stock maximal sera M . On lance une commande chaque fois qu'on atteint un état $E_{M-1.Q}$ (avec $1.Q < M$, 1 étant un nombre entier).

Si une demande arrive pendant que le stock est nul, la demande est différée. On lance encore une nouvelle commande chaque fois qu'on atteint un niveau net multiple de Q .

III.3.7.4.2 : Cas où le délai de livraison Δ est constant.

L'état des ressources étant défini comme le stock net augmenté des commandes en cours, nous allons, comme dans [9], représenter par une chaîne de Markov les différents états de ressources possibles pour en déduire les probabilités d'état du stock net :



On voit immédiatement que les Q probabilités d'état des ressources sont égales à $\frac{1}{Q}$.

Considérons le stock à un instant t quelconque : toutes les commandes passées avant le temps $t - \Delta$ auront été livrées au temps t et toute commande passée pendant $[t - \Delta, t]$ sera toujours en cours de livraison.

Par conséquent, les demandes étant toujours supposées poissonniennes, les probabilités d'état du stock net sont :

$$p_i = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{j=Q} p(M - Q + j - i, \lambda \Delta) \quad \text{pour } i \leq M - Q$$

et

$$p_i = \frac{1}{Q} \sum_{j=i+Q-M}^{j=Q} p(M - Q + j - i, \lambda \Delta) \quad \text{pour } i > M - Q$$

On en déduit la probabilité de rupture de stock :

$$P_{\text{rupt}} = \sum_{i=-\infty}^{i=0} P_i = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{j=Q} P(M - Q + j + i, \lambda \Delta)$$

On peut alors trouver le nombre probable "d'unités x temps" différées :

$$B(Q, M) = \sum_{i=-\infty}^{i=0} -i P_i = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{i}{Q} \sum_{j=1}^{j=Q} P(M - Q + j + i, \lambda \Delta)$$

Mais dans notre cas, nous recherchons le temps moyen d'attente ; en remarquant que $\lambda \cdot \bar{T}_3$ est aussi par définition le nombre "d'unités x temps" différées, on obtient :

$$\lambda \cdot \bar{T}_3 = B(Q, M)$$

$$\text{Donc : } \bar{T}_3 = \frac{B(Q, M)}{\lambda}$$

On démontre dans [9] que :

$$B(Q, M) = \frac{1}{Q} [\beta(M - Q) - \beta(M)]$$

avec :

$$\beta(v) = \frac{(\lambda\tau)^2}{2} P(v-1, \lambda\tau) - (\lambda\tau) \cdot v \cdot P(v, \lambda\tau) + \frac{v(v+1)}{2} P(v+1, \lambda\tau)$$

$$\text{où } P(x, \lambda\tau) = \sum_x^{\infty} p(j, \lambda\tau)$$

Nous pourrions construire un tableau $\beta(v)$, $v = 0, 1, \dots, LQ$.

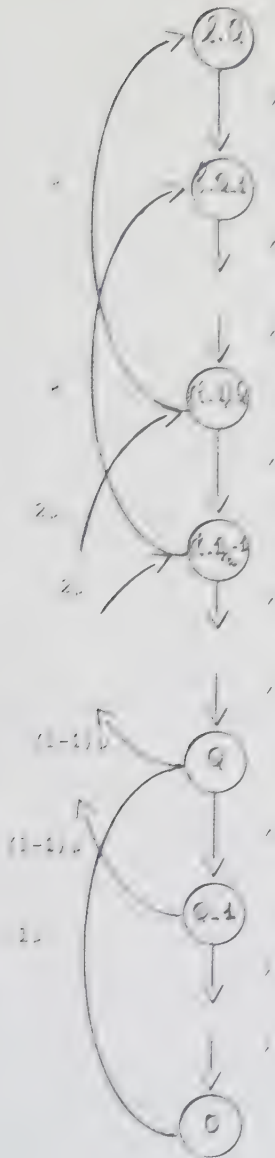
Pour $v = 0$, la formule de $\beta(v)$ est correcte avec la convention suivante :

$$P(j, \lambda\tau) = 1 \text{ pour } j < 0$$

III.2.7.4.3 : Cas où le délai de livraison suit une loi exponentielle.

Considérons le modèle comme un processus de Markov où les états sont ceux du stock net.

La difficulté réside dans le fait que, si $Q \neq 1$, les transitions ne se font pas toutes entre des états voisins.



Nous n'avons pas trouvé la solution exacte de ce cas mais nous proposons une solution approchée où l'erreur peut être rendue aussi petite que l'on veut dans la limite due à la précision d'un calcul numérique sur ordinateur.

Considérons donc le modèle de stock $\langle Q, M, 1 \rangle$ où Q et M ont la même définition que précédemment mais où on décide de ne plus passer de commande lorsque le stock net est dans l'état E_0 .

Si $1 \rightarrow \infty$, on retrouve le modèle $\langle Q, M \rangle$.

Si $M = 1$, Q , on retrouve le modèle connu (bien que compliqué) du réapprovisionnement par lots avec demandes perdues pendant la rupture de stock.

On peut trouver dans la bibliographie les probabilités d'état P_1 lorsque "1" est égal à quelques unités mais les formules sont très compliquées. Aussi, nous avons préféré chercher un algorithme pour obtenir $P_1(1, \lambda, \mu, Q)$. Cette recherche est faite dans le complément C.III.2.7.4.3/A.

On détermine 1 tel que la probabilité d'avoir au moins $1 \cdot Q$ demandes au cours du délai de livraison soit inférieure à une certaine valeur fixée ϵ (par exemple : $\epsilon = 10^{-4}$). L'expression $h(T)$ étant définie au paragraphe III.2.7.2.2

(pour diverses lois de livraison) comme la distribution marginale de la durée de rupture de stock T par délai de livraison, la condition précédente s'écrit :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} h_{1Q}(T) \cdot dT < \epsilon$$

Dans le cas d'un délai à distribution exponentielle cela s'écrit :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi}^{\infty} \frac{\lambda^{1.Q} \mu}{(\lambda + \mu)^{1.Q}} e^{-\mu T} dT < \varepsilon$$

soit :

$$- \frac{\lambda^{1.Q} \mu}{(\lambda + \mu)^{1.Q}} \left[\frac{e^{-\mu T}}{\mu} \right]_{\xi}^{\infty} < \varepsilon$$

d'où

$$\left[\frac{\lambda}{(\lambda + \mu)} \right]^{1.Q} < \varepsilon$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$1.Q > \frac{\text{Log } \varepsilon}{\text{Log } \left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right]}$$

Reprenons la recherche du temps moyen d'attente. Supposons Q donnée : pour une valeur M du modèle $\langle Q, M, 1 \rangle$, la probabilité de rupture sera :

$$(P_{\text{rupt}})_M = 1 - \sum_{i=1.Q-M+1}^{i=1.Q} P_i(1, \lambda, \mu, Q)$$

Remarquons que :

$$(P_{\text{rupt}})_{M+1} = (P_{\text{rupt}})_M - P_{1.Q-M}(1, \lambda, \mu, Q)$$

Pour trouver le temps moyen d'attente, on considère encore une fois que le nombre probable de demandes différées à un instant quelconque est égal au produit $\lambda \cdot \bar{T}_3$:

$$\lambda \cdot \bar{T}_{3M} = \sum_{i=0}^{i=1.Q-M-1} (1.Q-M-i) P_i(1, \lambda, \mu, Q)$$

$$\bar{T}_{3M} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{i=1.Q-M-1} (1.Q-M-i) P_i(1, \lambda, \mu, Q)$$

Afin de réduire les calculs, on remarquera que :

$$\bar{T}_{3M} = \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{i=0}^{i=1Q-M-1} (1Q-M) p_i(1, \lambda, \mu, Q) - \sum_{i=0}^{i=1Q-M-1} i \cdot p_i(1, \lambda, \mu, Q) \right]$$

et $\bar{T}_{3M+1} = \frac{(1Q-M-1)}{\lambda} \left[\sum_{i=0}^{i=1Q-M-1} p_i(1, \lambda, \mu, Q) - p_{1Q-M-1}(1, \lambda, \mu, Q) \right]$

$$- \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{i=0}^{i=1Q-M-1} i \cdot p_i(1, \lambda, \mu, Q) - (1Q-M-1) p_{1Q-M-1}(1, \lambda, \mu, Q) \right]$$

Remarque :

Dans le modèle $\langle Q, r \rangle$, on avait cherché la valeur de $\bar{T}_3$ par l'intermédiaire du temps moyen de rupture de stock. Cela n'est pas possible ici car le temps moyen d'attente, sachant que le stock est en rupture, n'est plus égal à la moitié du temps moyen de rupture de stock. En effet, des demandes différées peuvent être satisfaites alors que le stock net reste négatif (puisque'il peut y avoir plusieurs commandes en cours).

Afin de permettre d'éventuels contrôles statistiques, une expression du temps moyen de rupture de stock est formulée dans le complément C.III.2.7.4.3/B.

.../...

.../...

C.III.2.7.4.3/A : Algorithme donnant $p_i(1, \lambda, \mu, Q)$

Le graphe des transitions est le suivant :

On en déduit les équations :

$$p_1 = \frac{1\mu}{\lambda} p_0$$

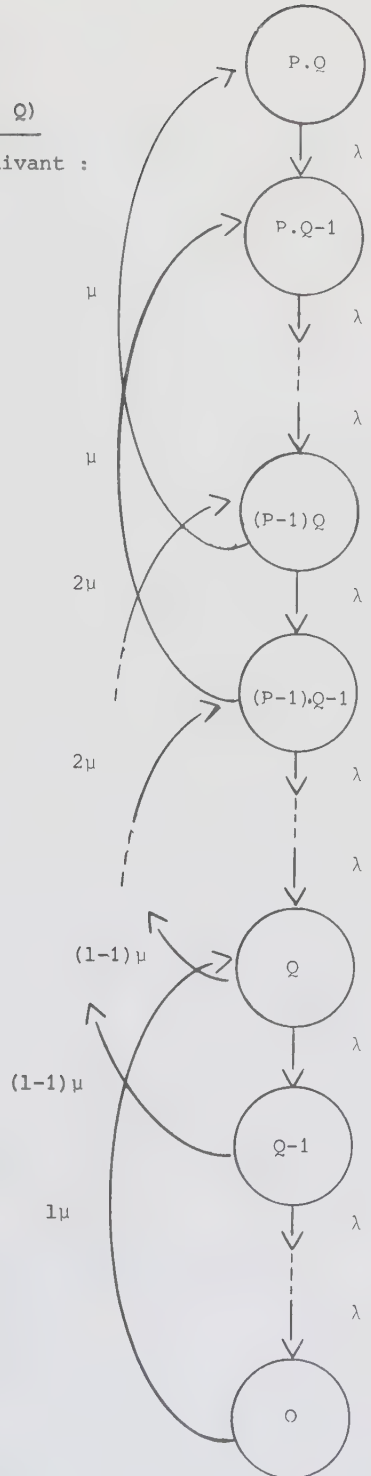
$$p_2 = \frac{(1-1)\mu + \lambda}{\lambda} p_1$$

$$p_3 = \frac{(1-1)\mu + \lambda}{\lambda} p_2$$

$$p_Q = \frac{(1-1)\mu + \lambda}{\lambda} p_{Q-1}$$

$$p_{Q+1} = \frac{(1-1)\mu + \lambda}{\lambda} p_Q - \frac{1\mu}{\lambda} p_{Q+1-Q-1}$$

$$p_{Q+2} = \frac{(1-2)\mu + \lambda}{\lambda} p_{Q+1} - \frac{(1-1)\mu}{\lambda} p_{Q+2-Q-1}$$



Posons :

$\beta_i = \left[\frac{1Q - i}{Q} \right]$ où la notation $\left[\right]$ désigne le nombre entier le plus grand

$$\leq \frac{1Q - i}{Q}$$

et $\psi = \frac{\lambda}{\mu}$, ainsi que $p_i = \alpha_i p_0$

On obtient :

$$p_i = \frac{\psi + \beta_{i-1}}{\psi} p_{i-1} - \frac{\beta_{i-Q-1}}{\psi} p_{i-Q-1}$$

$$\text{et : } \alpha_i = \left(\frac{\psi + \beta_{i-1}}{\psi} \right) \alpha_{i-1} - \left(\frac{\beta_{i-Q-1}}{\psi} \right) \alpha_{i-Q-1} \quad \text{si } Q < i \leq (1-1)Q+1$$

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} \left(\frac{\psi + \beta_{i-1}}{\psi} \right) \quad \text{pour } 1 < i \leq Q$$

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} - \frac{1}{\psi} \alpha_{i-Q-1} \quad \text{pour } (1-1)Q+1 < i \leq 1Q$$

$$\text{et } \alpha_{1Q} = \alpha_{(1-1)Q} \cdot \frac{1}{\psi}$$

puisque :

$$p_{1Q} = \frac{1}{\psi} p_{(1-1)Q}$$

En outre :

$$\sum_i p_i = 1 \implies p_0 = \frac{1}{\sum_i \alpha_i}$$

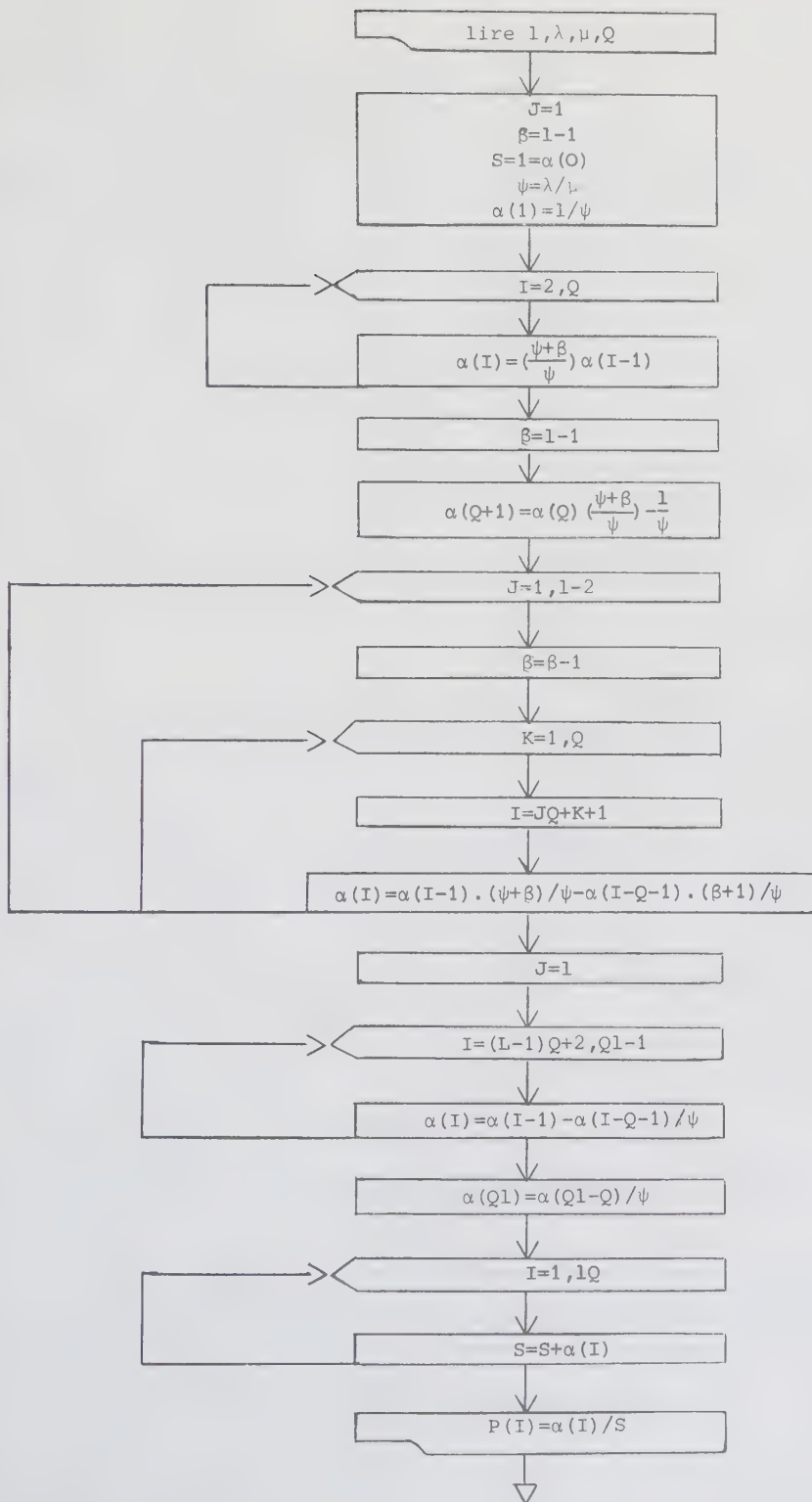
Donc

$$p_i = \frac{\alpha_i}{\sum_i \alpha_i}$$

On voit que p_i (que nous appellerons $p_i(1, \lambda, \mu, Q)$) dépend de $1, \lambda, \mu, Q$ puisque $\psi = \frac{\lambda}{\mu}$.

Compte tenu des résultats qui précèdent, il est facile d'établir l'algorithme permettant de trouver $p_i(1, \lambda, \mu, Q)$:

.../...



C.III.2.7.4.3/B : Temps moyen de la rupture de stock.

Dans le cas particulier où M est un multiple de Q, et par analogie avec le modèle $\langle Q = 1, R \rangle$, la densité de probabilité $g(T')$ pour interrompre la rupture de stock après que le stock net ait été pendant un temps T' dans l'un des états suivants :

$$E_{1Q-M}, E_{1Q-M-1}, \dots, E_{(1-1)Q-M+1}$$

s'écrit :

$$g(T') = \beta_M \cdot \mu e^{-\beta_M \cdot \mu T'}$$

où

$$\beta_M = \left\lceil \frac{M}{Q} \right\rceil \quad (\text{cf. C.III.2.7.4.3/A})$$

D'où une moyenne :

$$\begin{aligned} \bar{T}'_M &= \int_0^{\infty} T' \beta_M \cdot \mu \cdot e^{-\beta_M \cdot \mu T'} dT' \\ &= \frac{1}{\beta_M \cdot \mu} \end{aligned}$$

Pour une valeur $\bar{T}'_M$, la valeur $\bar{T}_M$, temps moyen de la rupture de stock, sera :

$$\bar{T}_M = \bar{T}'_M \cdot \sum_{i=(1-1)Q-M+1}^{(1-1)Q} \frac{(P_{\text{rupt}})_M}{p_i(1, \lambda, \mu, Q)}$$

Mais, dans le cas général, où M peut ne pas être multiple de Q, il faut tenir compte, s'ils existent, des états :

$$E_{(1-1)Q - \left\lceil \frac{M}{Q} \right\rceil Q}, E_{(1-1) - \left\lceil \frac{M}{Q} \right\rceil - 1}, \dots, E_{(1-1)Q-M+1}$$

pour lesquels le taux d'arrivée d'une livraison n'est plus $\beta_M \cdot \mu$ mais $(\beta_M + 1) \cdot \mu$

Il est alors préférable de raisonner sur les taux d'arrivées plutôt que, comme précédemment, sur les temps moyens. En effet, on peut directement écrire la probabilité pour que la rupture de stock s'interrompe sur l'intervalle de temps dt ; c'est :

$$\beta_M \cdot \mu \cdot dt \left[\frac{\sum_{i=1}^{Q-M} p_i(1, \lambda, \mu, Q)}{(1-1)Q - \beta_M Q + 1} \right] + (\beta_M + 1) \mu \cdot dt \left[\frac{\sum_{i=(1-1)Q - \beta_M Q + 1}^{(1-1)Q - \beta_M Q} p_i(1, \lambda, \mu, Q)}{(P_{rupt})_M} \right]$$

Le taux étant une somme de taux poissonniens, on en déduit que l'inverse de ce taux est le temps moyen de rupture cherché :

$$\overline{T}_M = \frac{(P_{rupt})_M}{\beta_M \cdot \mu \sum_{i=1}^{Q-M} p_i(1, \lambda, \mu, Q) + (\beta_M + 1) \mu \sum_{i=(1-1)Q - \beta_M Q + 1}^{(1-1)Q - \beta_M Q} p_i(1, \lambda, \mu, Q)}$$

III.2.7.5 : Remarque :

Nous venons de voir trois modèles de stock, mais il faut remarquer que :

- 1) le modèle $\langle Q, r \rangle$ n'est qu'un cas particulier du modèle $\langle Q, M \rangle$ où l'on accepte l'hypothèse selon laquelle la probabilité pour qu'il y ait Q demandes pendant le délai de livraison est négligeable ;
- 2) le modèle $\langle Q = 1, R \rangle$ n'est lui aussi qu'un cas particulier du modèle $\langle Q, M \rangle$; celui où le prix de la pièce est suffisamment élevé pour que la quantité à commander soit unitaire.

Si nous savions travailler sur le modèle $\langle Q, M \rangle$, quelle que soit la loi du délai de livraison, nous pourrions nous contenter de ce modèle ; malheureusement, tel n'est pas le cas.

D'autre part, le modèle $\langle Q, r \rangle$ n'étant valable que lorsqu'il n'y a qu'une commande en cours, on se propose d'éliminer ce modèle automatiquement, lors de l'optimisation des stocks, si la probabilité pour qu'une deuxième commande soit passée (alors qu'une commande est déjà en cours) est supérieure à 1 % ; cela s'écrit :

$$\sum_{x=0}^{x=Q} U(x) > 0,01 \iff \sum_{x=Q-1}^{x=Q-1} U(x) \leq 0,99$$

avec $U(x)$: probabilité marginale de la demande par délai de livraison (définie dans le complément C.III.2.8/B).

Comme :

$$U(x) = (1-\theta)^x \cdot \theta \text{ avec } \theta = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{x=Q-1} U(x) &= \theta \left[1 + (1-\theta) + (1-\theta)^2 + \dots + (1-\theta)^{Q-1} \right] \\ &= 1 - (1-\theta)^Q \end{aligned}$$

Donc :

$$(1-\theta)^Q \geq 0,01$$

ou :

$$\left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right]^Q \geq 0,01$$

Remarquons en outre que ce calcul permet de vérifier l'exactitude de la condition du paragraphe III.2.7.4.3 :

$$\left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right]^{1Q} < \varepsilon$$

Cette élimination automatique ne restreint pas l'optimisation car si la probabilité pour qu'il y ait plusieurs commandes en attente n'est pas négligeable, le modèle $\langle Q, M \rangle$ (avec $M = Q+r$) est meilleur que le modèle $\langle Q, r \rangle$.

Les remarques précédentes justifient le modèle $\langle Q, r \rangle$ si la loi de livraison n'est pas exponentielle et à l'intérieur d'un certain domaine de validité. Il semblerait donc qu'il soit inintéressant d'avoir cherché le modèle $\langle Q, r \rangle$ lorsque la loi de livraison est exponentielle. En réalité, outre l'avantage de vérifier la validité de nos modèles par recouplement entre $\langle Q, M \rangle$ et $\langle Q, r \rangle$, le modèle $\langle Q, r \rangle$ à loi de livraison exponentielle a un autre intérêt : le calcul sur ordinateur du modèle $\langle Q, r \rangle$ (à loi de livraison exponentielle) est plus court que le calcul du modèle $\langle Q, M \rangle$; il y a donc une possibilité de choix pour l'utilisateur entre le coût et la précision du calcul.

III.2.8 : Expression des coûts de stockage pour les différents modèles

III.2.8.1 : Introduction

Ces coûts seront nécessaires pour choisir entre les différents modèles d'une part et pour optimiser l'ensemble du modèle de maintenance d'autre part.

Nous ne nous intéressons qu'aux coûts qui dépendent du modèle du stock choisi et de ses paramètres.

Le fait d'ignorer les autres coûts ne nuira nullement à l'optimisation du système puisqu'ils resteront constants quelle que soit la stratégie adoptée.

III.2.8.2 : Modèle $\langle Q, r \rangle$

III.2.8.2.1 : Inventaire des coûts variables

III.2.8.2.1.1 : Coût d'acquisition

On suppose que le coût est proportionnel au nombre de commandes.

Le coût étant calculé par unité de temps, celui de l'acquisition aura pour valeur :

$$\frac{\lambda}{Q} \cdot A$$

Si "A" est le coût d'une commande.

III.2.8.2.1.2 : Coût de stockage

Là encore, nous admettrons l'hypothèse classique : le coût de stockage est proportionnel à la durée de stockage de cette unité et à son prix.

Soit $I \cdot C$ le coût de stockage d'une unité de valeur C pendant un temps unité.

Si $\bar{n}$ est le nombre moyen "d'unités x temps" stockées par unité de temps, le coût de stockage par unité de temps sera :

$$I \cdot C \cdot \bar{n}$$

En partant de la démonstration de [9], on montre dans le complément C 328/A que l'expression de $\bar{n}$ pour un modèle $\langle Q, r \rangle$ s'écrit :

$$\frac{Q}{2} + \frac{1}{2} + r - \mu' + \lambda \cdot \overline{T_3}$$

Où : μ' : demande probable au cours du délai de livraison (calculée dans le complément C 328/B).

$\lambda \cdot \overline{T_3}$: nombre probable "d'unités x temps" différées par unité de temps ; où $\overline{T_3}$ est le "temps moyen d'attente pour manque de pièce" déjà calculé.

III.2.8.2.2 : Expression du coût variable

Si $k(Q, r)$ représente le coût variable :

$$k(Q, r) = \frac{\lambda}{Q} A + I C \left[\frac{Q}{2} + \frac{1}{2} + r - \mu' + \lambda \cdot \overline{T_3} \right]$$

Remarquons que, pour un stock réel, $\lambda.\overline{T}_3$ sera bien inférieur à $(r - \mu')$.

Examinons d'abord $k(Q,r)$ en négligeant $\lambda.\overline{T}_3$.
L'expression devient :

$$(2) \quad k'(Q,r) = \frac{\lambda}{Q} A + I C \left[\frac{Q}{2} + \frac{1}{2} + r - \mu' \right]$$

$$\text{Posons } k' = k'(Q,r) + \mu' I C$$

Et intéressons nous aux couples $\{ Q, r \}$ tels que k' reste constant (isocoût) ; (2) peut encore s'écrire :

$$r = \frac{k'}{IC} - \frac{(Q+1)}{2} - \frac{\lambda A}{I.C.Q}$$

Posons :

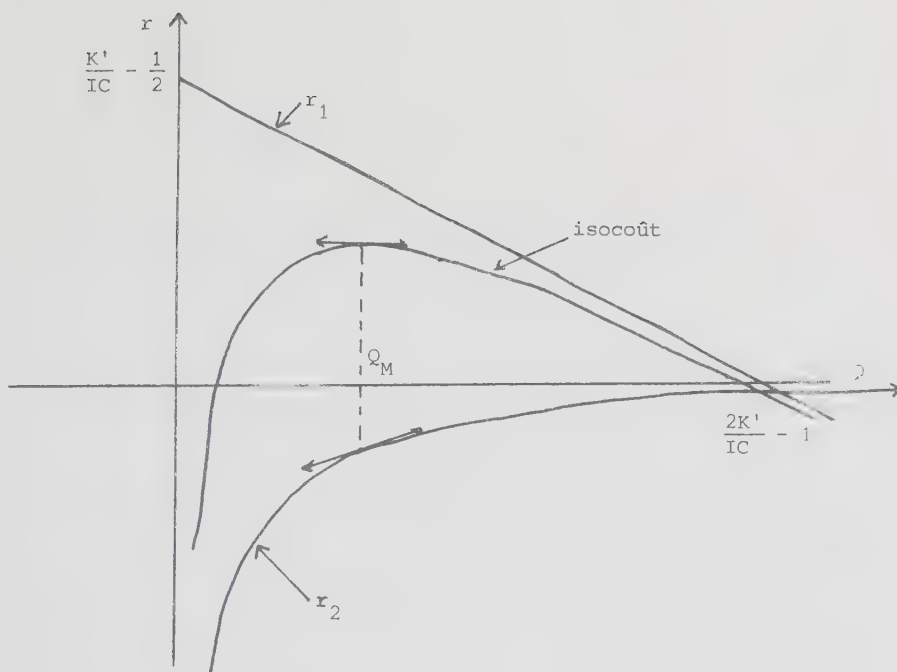
$$r_1(Q) = - \frac{(Q+1)}{2} + \frac{k'}{IC} \quad \longrightarrow \quad \text{droite}$$

$$r_2(Q) = - \frac{\lambda.A}{I.C.Q} \quad \longrightarrow \quad \text{hyperbole}$$

On a :

$$r = r_1(Q) + r_2(Q)$$

Ce qui peut se représenter par le graphique suivant :



Le maximum de l'isocoût s'obtient pour :

$$\frac{\partial r}{\partial Q} = 0 = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda A}{I.C} \times \frac{1}{Q^2}$$

$$\text{Soit } Q_M = \sqrt{\frac{2 \lambda . A}{I.C}}$$

On peut tout de suite remarquer que Q_M est égal à la quantité de commande optimale calculée par la formule de Wilson dans le cas du modèle déterministe.

III.2.8.3 : Modèle $\langle Q = 1, R \rangle$

III.2.8.3.1 : Inventaire des coûts variables

III.2.8.3.1.1 : Coût d'acquisition

Les commandes étant unitaires, le coût d'acquisition par unité de temps vaudra :

$$\lambda.A.$$

III.2.8.3.1.2 : Coût de stockage

Là encore le coût du stockage par unité de temps sera :

$$I . C . \bar{n}$$

Mais cette fois l'expression de $\bar{n}$ sera :

$$R - \mu' + \lambda . \overline{T_3}$$

où, comme précédemment :

μ' : demande probable pendant la durée de livraison
(C 328/B) .

$\lambda . \overline{T_3}$: nombre probable de demandes différées x temps
par unité de temps.

III.2.8.3.2 : Expression du coût variable

Si $k(R)$ représente le coût variable par rapport aux autres modèles, on a :

$$k(R) = \lambda A + I C \left[R - \mu' + \lambda . \overline{T_3} \right]$$

III.2.8.4 : Modèle < Q,M >

III.2.8.4.1 : Inventaire des coûts variables

III.2.8.4.1.1 : Coût d'acquisition

On a immédiatement :

$$\frac{\lambda}{Q} A$$

III.2.8.4.1.2 : Coût du stockage

Là encore, le coût du stockage par unité de temps sera :

$$I. C. \bar{n}$$

Et si on remplace r par $(M-Q)$ dans l'expression de $\bar{n}$ donnée dans le complément C 328/A, la formule est valable aussi dans ce cas :

$$\Rightarrow \bar{n} = \frac{Q+1}{2} + (M-Q) - \mu' + \lambda \cdot \overline{T_3}$$

où μ' et $\lambda \cdot \overline{T_3}$ ont même signification que précédemment.

En effet, $\left[\frac{Q+1}{2} + (M-Q) \right]$ est le niveau probable des ressources.

III.2.8.4.2 : Expression du coût variable

Si $K(Q,M)$ représente le coût variable par rapport aux autres modèles, on a :

$$K(Q,M) = \frac{\lambda}{Q} A + IC \left[\frac{Q+1}{2} + (M-Q) - \mu' + \lambda \cdot \overline{T_3} \right]$$

III.2.8.4.3 : Remarque

Souvent, les fournisseurs font des remises lorsqu'on commande des quantités multiples d'une quantité standard (commande par lots). On peut donc considérer qu'il existe un quatrième modèle où la quantité commandée est $k \cdot Q_0$ (k entier). Compte tenu qu'on peut aussi trouver l'expression du coût variable de ce modèle $\langle Q_0, M \rangle$, et que le problème mathématique qu'il faut ensuite résoudre est le même que celui du modèle $\langle Q, M \rangle$ nous n'avons pas inclus ce modèle dans notre étude.

C-III' 28/A - Calcul du niveau disponible probable $\bar{n}$

Définitions :

- Stock disponible : nombre d'unités réellement en stock.
- Stock net : stock disponible diminué des demandes différées.
- Niveau des ressources : stock net augmenté des commandes en cours.

On démontre dans [9] que la valeur probable du niveau disponible, pour un modèle $\langle Q, r \rangle$ s'exprime par :

$$\bar{n} = \frac{(Q+1)}{2} + r - \mu' + B(Q, r)$$

où : μ' : demande probable au cours du délai de livraison.

$B(Q, r)$: nombre probable de demandes différées à un instant t quelconque.

Examinons de plus près ce que signifient respectivement μ' et $B(Q, r)$.

Dans le calcul de μ' , on tient compte des probabilités pour que le nombre de demandes au cours du délai de livraison soit supérieur à r . Le niveau net peut donc être négatif.

Ceci peut se représenter graphiquement :

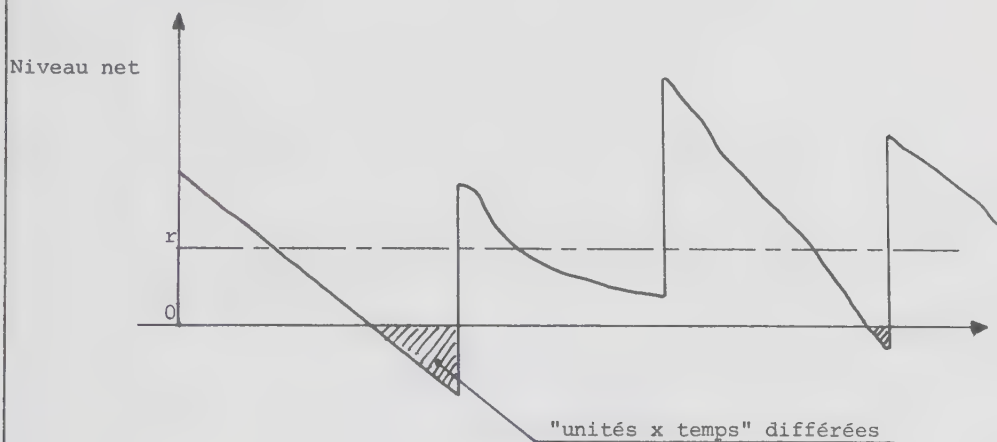


Fig. 1

La valeur probable du niveau net est égal à la valeur probable du niveau des ressources :

$$(1) \quad \frac{(Q+1)}{2} + r \quad \text{car} \quad \sum_{j=1}^Q (r+j) \cdot \frac{1}{Q} = \frac{Q+1}{2} + r$$

diminuée de la valeur probable des demandes au cours du délai de livraison :

$$(2) \quad \frac{(Q+1)}{2} + r - \mu'$$

La détermination de μ' a été faite ci-après.

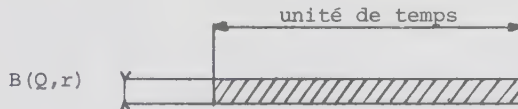
Pour obtenir le niveau disponible probable, il suffit d'ajouter le nombre probable de demandes différées à un instant quelconque : $B(Q,r)$, au niveau net probable.

Dans [9], les auteurs ont cherché l'expression exacte de $B(Q,r)$ pour le modèle $\langle Q,r \rangle$ lorsque le délai de livraison est constant :

$$B(Q,r) = \frac{1}{Q} [\beta(r) - \beta(r+Q)]$$

où
$$\beta(v) = \frac{(\lambda\tau)^2}{2} P(v-1, \lambda\tau) - (\lambda\tau) v P(v, \lambda\tau) + \frac{v(v+1)}{2} P(v+1, \lambda\tau)$$

Ajouter $B(Q,r)$ à l'expression (2) revient à ajouter la surface d'un rectangle de largeur $B(Q,r)$ et de longueur l'unité de temps :



de façon à compenser les surfaces ombrées sur la figure 1.

Mais, pour calculer cette dite surface, il existe une autre solution, qui consiste à passer par la durée probable de rupture de stock (durée probable que nous avons déjà cherchée).

Le nombre probable de demandes différées lors d'un cycle sera donc :

$$\lambda \cdot \bar{T}'$$

Le nombre probable d'"unité x temps" différées pendant un cycle sera alors :

$$(\lambda \cdot \bar{T}') \times \frac{\bar{T}}{2} \text{ puisque le processus des demandes est poissonnien.}$$

Comme il y aura $\frac{\lambda}{Q}$ cycles par unité de temps, le nombre "d'unité x temps" différées par unité de temps s'écrira :

$$(\lambda \cdot \overline{T}) \left(\frac{\overline{T}}{2} \right) \times \frac{\lambda}{Q}$$

Mais cette expression n'est autre que $\lambda \overline{T_3}$, puisque nous avons déjà vu que $\overline{T_3} = \frac{\lambda \overline{T^2}}{2Q}$

$$\text{Donc : } B(Q, r) = \lambda \cdot \overline{T_3}$$

Résultat d'ailleurs logique si on se souvient que $\overline{T_3}$ est l'attente probable par unité demandée.

C-III 28/B - Recherche de μ'

μ' est la demande probable au cours du délai de livraison.

Définissons d'abord la distribution marginale de la demande par délai de livraison :

$$U(x) = \int_0^{\infty} f(x, \tau) \cdot g(\tau) d\tau$$

Dans le cas d'une demande poissonnienne, on a :

$$f(x, \tau) = p(x, \lambda \tau) = \frac{(\lambda \tau)^x}{x!} e^{-\lambda \tau}$$

Cas particulier n° 1 : le délai de livraison Δ est constant.

On a immédiatement :

$$U(x) = \frac{(\lambda \Delta)^x}{x!} e^{-\lambda \Delta}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mu' &= \sum_{x=0}^{x=\infty} x \cdot \frac{(\lambda\Delta)^x}{x!} e^{-\lambda\Delta} \\ &= e^{-\lambda\Delta} \cdot (\lambda\Delta) \cdot \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{(\lambda\Delta)^{x-1}}{(x-1)!}\end{aligned}$$

Soit :

$$\underline{\mu' = \lambda\Delta}$$

Cas particulier n° 2 : Le délai suit une loi gamma d'ordre $\alpha+1$.

On a donc :

$$U(x) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^x}{x!} e^{-\lambda\tau} \cdot \beta \frac{(\beta\tau)^{\alpha}}{\alpha!} e^{-\beta\tau} d\tau$$

ou

$$U(x) = \frac{(x+\alpha)!}{x!\alpha!} \frac{\lambda^x \beta^{\alpha+1}}{(\lambda+\beta)^{x+\alpha+1}} \int_0^{\infty} (\lambda+\beta) \frac{[(\lambda+\beta)\tau]^{x+\alpha}}{(x+\alpha)!} e^{-(\lambda+\beta)\tau} d\tau$$

On reconnaît sous le signe d'intégration une fonction densité d'une loi d'ordre $(x+\alpha+1)$; on a donc :

$$U(x) = \frac{(x+\alpha)!}{x!\alpha!} \frac{\lambda^x \beta^{\alpha+1}}{(\lambda+\beta)^{x+\alpha+1}}$$

$U(x)$ peut encore s'écrire :

$$U(x) = \frac{(x+\alpha)!}{x!\alpha!} \times \left(\frac{\beta}{\lambda+\beta}\right)^{\alpha+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\right)^x \quad x = 1, 2, \dots$$

On reconnaît là une fonction densité de loi binomiale négative :

$$U(x) = b_N [x ; \alpha+1, \beta/(\beta+\lambda)]$$

D'où :

$$\mu' = \sum_1^{\infty} x \cdot b_N [x ; \alpha+1, \beta/(\beta+\lambda)]$$

μ' est donc la moyenne d'une distribution binomiale négative,

Par conséquent :

$$\mu' = (\alpha+1) \times \frac{(1-\theta)}{\theta} \quad \text{si} \quad \theta = \frac{\beta}{\beta+\lambda}$$

Cas particulier n° 3 : délai exponentiel

On a donc :

$$U(x) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^x}{x!} e^{-\lambda\tau} \cdot \mu \cdot e^{-\mu\tau} d\tau$$

En remarquant que la fonction exponentielle n'est autre qu'une fonction gamma dans le cas particulier où $\alpha=0$ et $\beta=\mu$, on obtient directement à l'aide des calculs précédents :

$$\mu' = \frac{1-\theta}{\theta} \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

Soit

$$\underline{\mu' = \frac{\lambda}{\mu}}$$

Remarquons que, dans ce cas particulier, $U(x)$ est une densité géométrique :

$$U(x) = \theta(1-\theta)^x$$

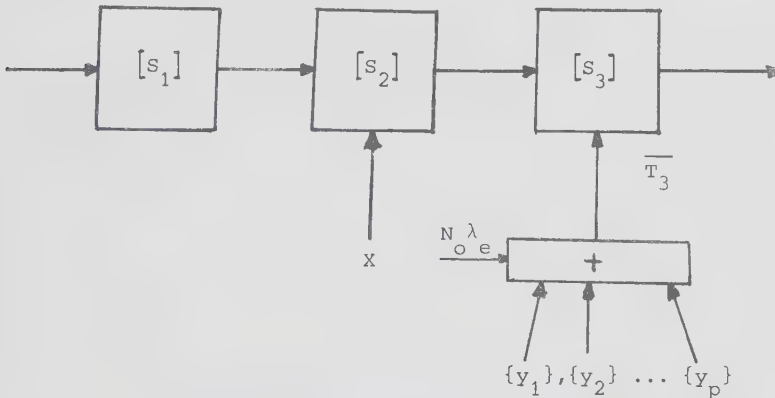
III.2.9 : Optimisation

Nous avons vu précédemment que la décomposition du système global en trois systèmes est telle que :

- dans $[S_1]$ n'intervient aucune variable de décision.

- dans $[s_2]$ n'intervient que la variable de décision X .

- dans $[s_3]$ n'interviennent que les variables de décision $[\{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_p\}]$ par l'intermédiaire d'une seule variable $\overline{T}_3$,
 "temps moyen d'attente pour manque de pièce" :



où N_0 est la contrainte de disponibilité.

Ainsi, toutes les caractéristiques des stocks définies comme les variables de décision $[\{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_p\}]$ ne sont directement liées qu'à deux paramètres internes du système global $\overline{T}_3$ et K_3 .

On verra dans ce chapitre que la politique optimale du système global contient une politique optimale du sous-système $[s_3]$ minimisant $\overline{T}_3$ sous une contrainte K_3 .

Grâce à une première optimisation par calcul direct (sur un domaine restreint), on déterminera pour chacun des types de sous-ensemble une politique optimale du stock sous la forme d'un tableau :

$$\overline{T}_{3_i}^*(K_{3_i})$$

On cherchera ensuite l'ensemble des politiques optimales des stocks par un processus d'allocation optimale. Le résultat se présentant essentiellement sous la forme d'un nouveau tableau :

$$\overline{T}_3^*(K_3)$$

Cette optimisation des stocks permet d'exprimer la disponibilité $\overline{N}$ en fonction de deux variables de décision "réduites" K_2 et K_3 de façon biunivoque à X et $\overline{T}_3^*$:

$$\begin{array}{ccc} K_2 & \longleftrightarrow & X \\ K_3 & \longleftrightarrow & \overline{T}_3^* \end{array}$$

La fonction $\overline{N}(K_2, K_3)$ étant une fonction croissante quasi concave, on trouve, par une méthode du gradient discrète la solution minimisant le coût variable $K=K_2+K_3$ sous la contrainte $\overline{N} \geq \overline{N}_0$.

III.2.9.1 : Optimisation des stocks

Nous cherchons la politique de gestion des stocks minimisant le temps d'attente pour manque de pièce probable $\overline{T}_3$ sous une contrainte de coût K_3 .

Le sous-ensemble de type "i" parmi les "p" types différents coûtera c_i et aura un taux de demande λ_i , $i=1,2,\dots,p$.

On admet qu'on peut choisir différents modèles de gestion pour différents types de sous-ensembles. On peut donc chercher indépendamment le modèle de stock pour un sous-ensemble minimisant $\overline{T}_{3i}(K_{3i})$ sous une contrainte K_{3i} . Soit $\overline{T}_{3i}^*(K_{3i})$ la solution du problème.

Ayant ainsi cherché la politique de gestion pour chacun des sous-ensembles, il sera alors possible de trouver la politique globale de gestion des stocks en cherchant la solution de cette allocation unidimensionnelle par la méthode de la programmation dynamique [18].

$$\overline{T}_3^*(K_3) = \min_{\{K_{3i}\}} \left[\sum_{i=1}^{i=P} \frac{\lambda_i}{\sum_i \lambda_i} \overline{T}_{3i}^*(K_{3i}) \right]$$

avec $\{K_{3i}\}$ satisfaisant la contrainte :

$$\sum_i K_{3i} \leq K_3$$

III.2.9.1.1 : Recherche de $\overline{T}_{3i}^*(K_{3i})$

Soit $\overline{T}_{3i}$ ($\langle Q, r \rangle, K_{3i}$) le "temps probable d'attente pour manque de la pièce "i" " si on choisit un modèle $\langle Q, r \rangle$ et ce, pour les valeurs Q et r des paramètres :

$$\text{Soit } \overline{T}_{3i}^* (\langle Q^*, r^* \rangle, K_{3i}) = \min_{\{Q, r\}} \left[\overline{T}_{3i} (\langle Q, r \rangle, K_{3i}) \right]$$

avec $\{Q, r\}$ tel que $K(Q, r) \leq K_{3i}$

La recherche de $\overline{T}_{3i}^* (\langle Q^*, r^* \rangle, K_{3i})$ est exposée dans le complément C III.2.9.1/A

Définissons de même :

$$\overline{T}_{3i} (\langle Q=1, R^* \rangle, K_{3i})$$

$$\text{et } \overline{T}_{3i} (\langle Q^*, M^* \rangle, K_{3i})$$

dont les recherches sont exposées dans les compléments
C III.2.9.1/B et C III.2.9.1/C .

Nous ne pouvons pas trouver $\overline{T}_{3i}^*(K_{3i})$ sous une forme
analytique ; aussi nous chercherons $\overline{T}_{3i}^*(K_{3i})$ pour un ensemble
de N valeurs K_{3i} également espacées d'une valeur Δk .

Il est alors facile de trouver $\overline{T}_{3i}^*(K_{3i})$ tel que :

$$\overline{T}_{3i}^*(K_{3i}) = \text{Min} \left[\overline{T}_{3i}(\langle Q^*, r^* \rangle, K_{3i}), \overline{T}_{3i}(\langle Q=1, R^* \rangle, K_{3i}) \right. \\ \left. \overline{T}_{3i}(\langle Q^*, M^* \rangle, K_{3i}) \right]$$

K_{3i} prendra les valeurs $K_{3i_0}, K_{3i_0} + \Delta k, \dots,$

$K_{3i_0} + (J-1).\Delta k, \dots, K_{3i_0} + N.\Delta k$;

où K_{3i_0} est supérieur à zéro car même si on supposait
un stock disponible toujours nul, il en coûterait au moins le
prix de la commande des pièces demandées. Dans la réalité, pour
le modèle $\langle Q, r \rangle$, le coût K_{3i_0} est généralement celui qui
correspond à une valeur Q calculée selon la formule de Wilson
en univers déterministe (avec $r = 0$) .

On peut remplacer la notation $K_{3i_0} + (J-1).\Delta k$
par $K_{3i}(J)$ de façon à considérer l'ensemble des valeurs prises
par K_{3i} sous forme d'un tableau.

De même, on pourra donner un numéro à chacun des modèles :

$\langle Q, r \rangle \longleftrightarrow 1$

$\langle Q=1, R \rangle \longleftrightarrow 2$

$\langle Q, M \rangle \longleftrightarrow 3$

et considérer le tableau Modèle (J) donnant le modèle optimal pour un coût $K_{3i_0} + (J-1) \Delta_k$.

Finalement, on obtiendra les tableaux Modèle (J), Q(J), M(J), R(J), $\overline{T}_{3i}^*(J)$

Pour une valeur donnée J, il n'y a pas une valeur significative dans chacun des tableaux Q(J), R(J), M(J), cela dépend de la valeur prise par Modèle (J).

III.2.9.1.2 : Politique globale des stocks

Pour le sous-ensemble de type "i", nous venons de voir que nous disposons d'un tableau représentant $\overline{T}_{3i}^*$ et les paramètres correspondants du modèle pour chaque valeur $K_{3i}(J)$.

En cherchant ce tableau pour chaque type de sous-ensemble, nous pouvons obtenir $\overline{T}_3^*(K_j)$ à l'aide de la programmation dynamique. Cette recherche est faite dans le complément C III.2.9.1/D.

Compte tenu de la dimension des calculs, il faut sortir chaque tableau sur une mémoire extérieure (disque ou bande magnétique).

Les derniers tableaux qui nous serviront à optimiser le système de maintenance seront les suivants :

$\overline{T}_3^*(J)$, Modèle (I,J), Q(I,J), R(I,J), M(I,J), $K_3(I,J)$

où l'indice "I" désigne le type "i" du sous-ensemble.

Remarque 1 :

Le modèle 3 englobe le modèle 1.

Nous conservons le modèle 1 à cause de notre ignorance : en effet :

1/ nous ne savons pas trouver $\overline{T}_{3i}(3^*, K_{3i})$ si le délai obéit à une loi γ .

2/ même pour un délai de livraison obéissant à une loi exponentielle, nous calculons $\overline{T}_{3i}(3^*, K_{3i})$ de façon approchée (erreur assez faible, il est vrai).

Mais nous pouvons dire :

- si $\overline{T}_{3i}(3^*, K_{3i})_1$ représente $\overline{T}_{3i}(3^*, K_{3i})$ dans le cas où le délai de livraison suit une loi exponentielle de moyenne μ ,
- et si $\overline{T}_{3i}(3^*, K_{3i})_2$ représente $\overline{T}_{3i}(3^*, K_{3i})$ dans le cas où le délai de livraison suit une loi γ de même moyenne μ , on aura :

$$\overline{T}_{3i}(3^*, K_{3i})_1 > \overline{T}_{3i}(3^*, K_{3i})_2$$

pour une même valeur K_{3i} .

En effet, un délai à loi exponentielle de moyenne μ est plus aléatoire qu'un délai à loi γ de même moyenne μ .

Donc, si on reconnaît dans le phénomène réel un délai obéissant à une loi γ et si, le modèle 1 étant dans son domaine de validité, on obtient :

$$\overline{T}_{3i}(3^*, K_{3i})_1 > \overline{T}_{3i}(1^*, K_{3i})_2$$

on choisira le modèle 1.

Si l'inégalité est dans le sens inverse, on choisira alors le modèle 3. Il faudra ensuite comparer ce résultat avec $\overline{T}_{3i}(2^*, K_{3i})_2$.

Remarque 2 :

Supposons, ce qui est très fréquent, qu'une entreprise soit dans l'obligation de gérer un stock pour sa propre production, (les demandes seront différées). La politique de gestion aura souvent été déterminée en calculant Q^* par la formule de Wilson et en déterminant r , ou R , ou M de façon plus ou moins expérimentale. Dans de rares cas, elle aura été calculée en optimisant un modèle après avoir pécuniairement pénalisé les attentes de pièces de façon plus ou moins subjective.

Les coûts variables du stock de l'entreprise seront les coûts K_{3i} et il existera une certaine attente probable pour manque de pièce $\overline{T}_3$.

Nous pouvons donc proposer, compte tenu de l'étude qui précède une nouvelle politique minimisant $\overline{T_3}$ sous une contrainte $K_3 < \sum_i K_{3i}$ où la quantité $\sum_i K_{3i}$ a la même valeur que précédemment à l'étude.

Nous pourrions aussi, pour un type de sous-ensemble donné, établir des abaques pour des valeurs standard de A et de I ; chaque abaque étant valable pour une valeur du coût K_{3i} , que le gestionnaire accepte de payer, et donnant la stratégie à appliquer en fonction des paramètres λ_i et C_i .

Remarque 3 :

Les calculs de stocks sont faits en supposant un taux d'arrivée de la demande égal à $\bar{N}_0 \cdot \lambda_e$. Ceci est vrai lorsque la disponibilité $\bar{N}$ est égale à $\bar{N}_0$ (cas de la solution cherchée). Cela n'est plus vrai si $\bar{N} \neq \bar{N}_0$. Ainsi, les disponibilités qui seront calculées sur le chemin optimal de la recherche globale ne seront généralement pas exactes ; mais cela ne change pas les relations d'ordres et la méthode d'optimisation reste valable.

Par contre, on remarque qu'il serait plus compliqué de traiter le problème dual : maximiser la disponibilité sous une contrainte de coût car cela conduirait à déterminer en cours d'optimisation la valeur de $\bar{N} \cdot \lambda_e$ et de procéder à l'optimisation de la politique de stock autant de fois que nécessaire pour arriver à la solution optimale globale.

C III.2.9.1/A - Recherche de $\overline{T}_{3i} (\langle Q^*, r^* \rangle, K_{3i})$

Reprenons l'expression des coûts variables d'un modèle $\langle Q, r \rangle$:

$$K(Q, r) = \frac{\lambda A}{Q} + IC \left[\frac{Q+1}{2} + r - \mu + \lambda \overline{T}_3 \right]$$

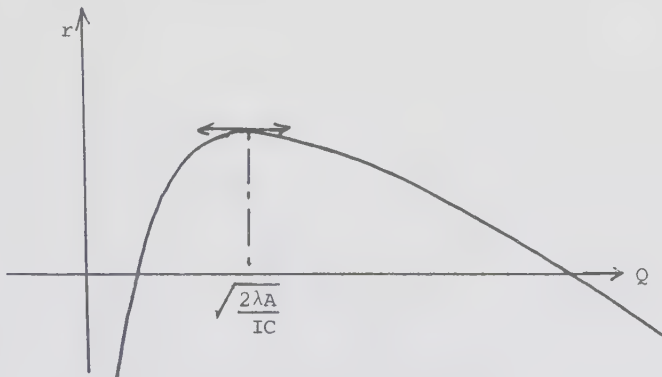
Nous avons vu au paragraphe III.2.8.2.2. que l'expression :

$$K' = K'(Q, r) + \mu IC = \frac{\lambda A}{Q} + IC \left[\frac{Q}{2} + \frac{1}{2} + r - \mu \right]$$

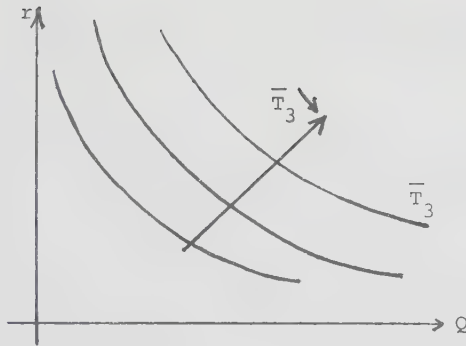
qui peut encore s'écrire :

$$r = \frac{K'}{IC} - \frac{Q+1}{2} - \frac{\lambda A}{IC Q}$$

pouvait se représenter graphiquement :

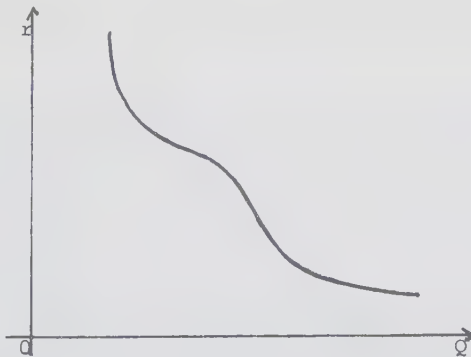


D'autre part, si le délai est exponentiel, les "isotemps" $\overline{T}_3(Q, r)$ dans le plan (Q, r) ont la forme :

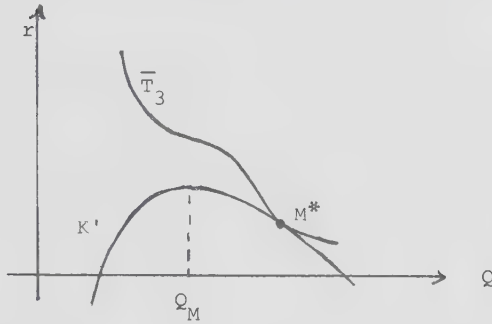


puisque $\overline{T}_3 = \frac{\lambda}{Q} \times \frac{1}{\left[\mu^2 \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$

Ce n'est pas évident pour les autres délais car, bien que devant être toujours décroissante, la courbe de l'isotemps peut présenter des points d'inflexion :



Considérons le point M^* où K' est tangent à un isotemps :

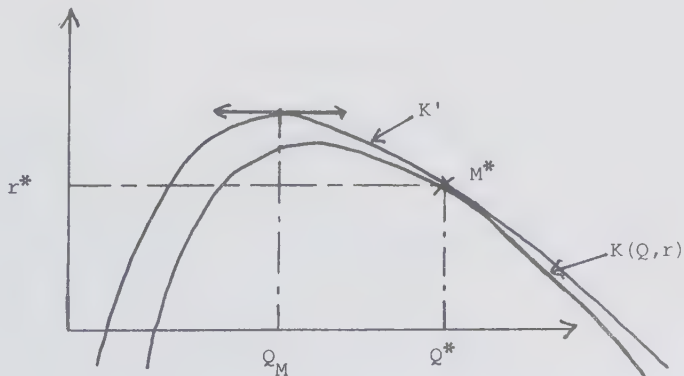


Le point M^* est le point M de K' où le temps $\bar{T}_3$ est minimal.
Reprenons l'expression exacte du coût : (IC étant une constante)

$$K(Q, r) = K'(Q, r) + \lambda T_3$$

En réalité, tous les points $M \neq M^*$ de la courbe K' ont un coût supérieur à celui existant au point M^* puisque $\bar{T}_3(M) > \bar{T}_3(M^*)$ pour $M \neq M^*$.

Donc la courbe $K(Q, r)$ qui passe en M^* est à l'intérieur de K' , sauf au point M^* :



Nous en déduisons que $Q^* \geq Q_M$

Soit, pour un phénomène discret $Q^* \geq \left[\sqrt{\frac{2\lambda A}{IC}} \right]$

D'autre part, nous voulons trouver Q^* et r^* pour N valeurs K_{3i} également espacées d'une valeur Δk (nous cherchons donc 2 tableaux $Q^*(K_{3i})$ et $r^*(K_{3i})$). Aussi, nous allons nous orienter vers un organigramme où les calculs permettant de passer de $\bar{T}_{3i}(<Q^*, r^*>, K_{3i})$ à $\bar{T}_{3i}(<Q^*, r^*>, K_{3i} + \Delta k)$ sont assez simples.

Dans ce but, nous mettrons en mémoire les couples (Q, r) qui sont sur la frontière définie par un coût K_{3i} et nous repartirons de ces couples (Q, r) mémorisés pour déterminer la nouvelle frontière correspondant à un coût $K_{3i} + \Delta k$.

Pour chaque valeur K_{3i} , nous cherchons le couple (Q^*, r^*) minimisant $\bar{T}_{3i}(K_{3i})$.

La valeur K_{3i} de départ correspond (le phénomène étant discret) à :

$$K_{3i0} = \min_{j=1,2,3,\dots} \left[K \left(\left[\sqrt{\frac{2\lambda A}{IC}} \right] + j, 0 \right) \right]$$

On en arrive donc à l'organigramme de la page 119.

La planche P3/X montre un exemple de chemin optimal pour un délai à loi exponentielle.

On peut encore examiner l'influence de ψ ($\psi = \mu/\lambda$), sur la pente des isotemps.

Reprenons l'expression de $\bar{T}_3$ dans le cas où le délai de livraison suit une loi exponentielle :

$$\bar{T}_3 = \frac{\lambda}{2.Q} \times \frac{1}{\mu^2} \frac{1}{(1+\psi)^r}$$

ou :

$$(1+\psi)^r = \frac{1}{2.\psi.Q.\bar{T}_3.\mu}$$

$$r \log(1+\psi) = -\log 2.\psi.Q.\bar{T}_3.\mu$$

Soit :

$$r = \frac{-\log 2.\psi.Q.\bar{T}_3.\mu}{\log(1+\psi)}$$

D'où :

$$\frac{\partial r}{\partial Q} = \frac{-1}{Q} \times \frac{1}{\log(1+\psi)}$$

On en déduit que pour un point quelconque (Q_0, r_0) , la pente de l'isotemps passant par ce point sera d'autant plus négative que ψ sera faible.

Ainsi, si $Q_w^* = \sqrt{\frac{2\lambda A}{IC}}$ est la quantité de commande en

univers déterministe (formule de Wilson), le chemin optimal défini ici sera d'autant plus éloigné de la droite $Q=Q_w^*$ (dans le repère (Q, r)) que μ sera faible (pour λ constant). C'est ce que montre la planche P3/XI.

$\lambda_i, C_i, \mu_i, A, I, \Delta h, K_{\max}$

- 119 -

Calcul du tableau $\overline{T}_i(r)$

$$Q_M = \left\lceil \sqrt{\frac{2\lambda A}{IC}} \right\rceil$$

Initialisation d'un tableau $TQ(I) = Q_M, \forall I$

Calcul de $K_{3io}, K = K_{3io}$

$r = 0$

$Q = TQ(r)$

$Q = Q + 1$

$K(Q, r) :: K$

$Q = Q - 1$

$TQ(r) = Q$

$$\overline{T}_3 = [\overline{T}_i(r)]^2 \times \lambda / Q$$

(si délai exponentiel)

$\overline{T}_3 :: \overline{T}_3^*(K)$

$\overline{T}_3^*(K) = \overline{T}_3$

$r^*(K) = r$

$R = r$

$r = r + 1$

$K_1 = K(Q_M, r)$

$K_1 :: K$

$K_2 = K(Q_M + 1, r)$

$TQ(r) :: Q_M$

$K_2 :: K$

$Q^*(K) = TQ(r)$

$K = K + \Delta k$

$K :: K_{\max}$

C-III 291/B - Recherche de $\bar{T}_{3i}$ ($<Q = 1, R^* >, K_{3i}$).

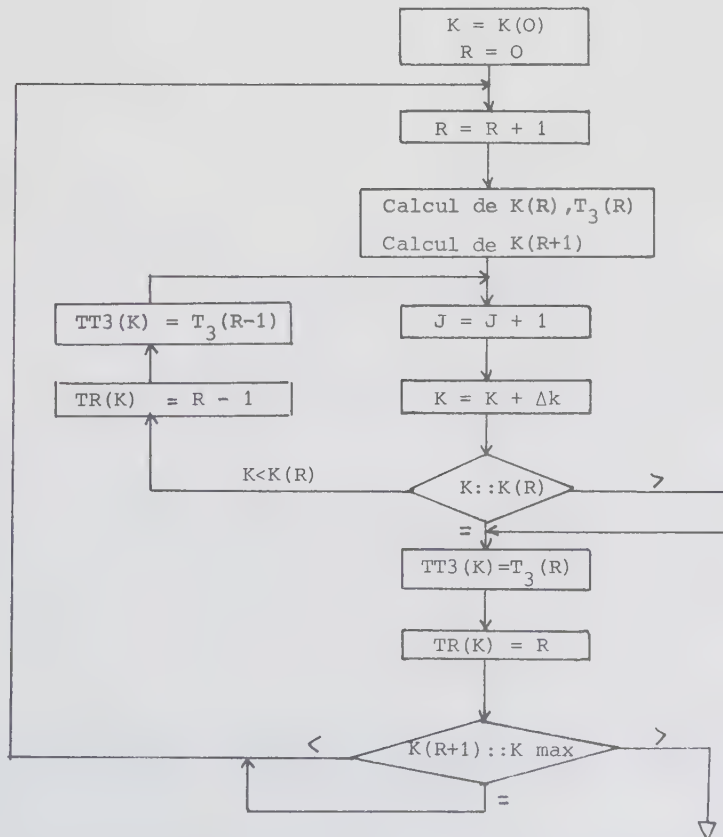
Reprenons l'expression des coûts variables :

$$K(R) = \lambda A + IC [R - \mu + \lambda \cdot T_3]$$

Dans ce modèle, il n'y a qu'une variable ; aussi, minimiser $\bar{T}_{3i}(K_{3i})$ sous une contrainte de coût K_{3i} revient à maximiser R sous la même contrainte.

Il suffit donc de chercher $K(R)$ et $\bar{T}_{3i}(R)$ pour $R = 1, 2, \dots$ et, à partir de ces valeurs, remplir les tableaux $\bar{T}_{3i}(K_{3i})$ et $R(K_{3i})$.

On a l'organigramme :



C-III 291/C - Recherche de $\bar{T}_{3i} (<Q^*, M^*, K_{3i})$.

Reprenons l'expression des coûts variables :

$$K(Q,M) = \frac{\lambda A}{Q} + IC \left[\frac{Q+1}{2} + M - Q - \mu' + \lambda \cdot T_3(Q,M) \right]$$

Avant de chercher le chemin optimal, il faut d'abord calculer des tableaux $(\bar{T}_3(M))_Q, \forall M$, pour quelques valeurs de Q . On a déjà vu comment calculer $T_3(Q,M)$; il n'est pas possible de déduire directement $\bar{T}_3(Q+1,M)$ de $\bar{T}_3(Q,M)$, il faut chercher un autre tableau $(\bar{T}_3(M))_{Q+1}, \forall M$. Le calcul d'un tel tableau étant long, il est fait "à la commande", au fur et à mesure qu'est déterminé le chemin optimal.

Mis à part le calcul de $(T_3(M))_Q$ et cette mesure d'économie, la recherche du chemin optimal $T_{3i} (<Q^*, M^*, K_{3i})$ est identique à celle de $T_{3i} (<Q^*, r^*, K_{3i})$.

C-III 291/D - Recherche de $\bar{T}_3^*(K_3)$.

1 - Notations :

λ_i : taux de défaillance du sous-ensemble de type "i".

$\bar{T}_3(N)$: temps moyen d'attente pour les N premiers types de sous-ensemble.

$f_N(K_3)$: valeur optimale de $\bar{T}_3(N)$ pour un coût " K_3 ".

" p " : nombre de types de sous-ensembles.

2 - Expression mathématique.

Soit la fonction économique :

$$(1) \quad \bar{T}_3 = \bar{T}_3(P) \quad \text{où} \quad \bar{T}_3(p) = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j} \bar{T}_{3,i}^*(K_{3,i}).$$

Il faut minimiser cette fonction économique (temps moyen pour manque de pièce) compte tenu d'une contrainte de coût.

La fonction dépend des variables de décision $\{K_{31}, K_{32}, \dots, K_{3p}\}$.

Les contraintes s'écrivent :

$$K_{3i} \geq K_{3i_0}, \quad \sum_i K_{3i} \leq K_3.$$

La fonction (1) est additive, aussi l'équation fonctionnelle s'écrira :

$$f_N(K_3) = \min_{\substack{K_{3N_0} \leq K_{3N} \leq K_3 - \sum_{i=1}^{N-1} K_{3i_0}}} \left[\bar{T}_{3N}(K_{3N}) + f_{N-1}(K_3 - K_{3N}) \right]$$

Le processus dynamique comprend p étapes et avant de chercher la politique optimale, pour un coût "K₃", à l'aide de l'équation fonctionnelle, il faut d'abord construire pour chaque étape N, le tableau donnant :

- la décision optimale K_{3N} ,
- la valeur de la fonction économique $f_N(K_3)$ pour chaque valeur de la variable d'état K_3 .

3 - Organigramme de principe.

3.1. Organigramme de calcul des tables.

Il est représenté ci-après ; celui-ci découle de l'équation fonctionnelle. β est le minimum de la fonction économique pour un coût K_3 (i.e. : $f_N(K_3)$) ; γ est la politique correspondante sur K_{3N} .

On sort les tables $f_i(K_3)$ et $K_{3i}(K_3)$ après chaque étude de sous-ensemble pour ne pas encombrer l'ordinateur.

La table $f_p(K_3)$ correspond à $\bar{T}_3^*(K_3)$ c'est la seule table qui servira dans l'optimisation du système de maintenance complet.

3.2. Organigramme décrivant la recherche de la politique optimale.

Il est représenté à la suite de l'organigramme de recherche des tables. On cherche les caractéristiques de la politique correspondant à un certain coût K_3^* qui ne sera déterminé qu'après l'optimisation du système de maintenance complet.

4 - Diminution du temps de calcul par troncature des fonctions d'utilité.

Les fonctions d'utilité sont les fonctions $T_{3i}^*(K_{3i})$ $i = 1, 2, \dots, p$.

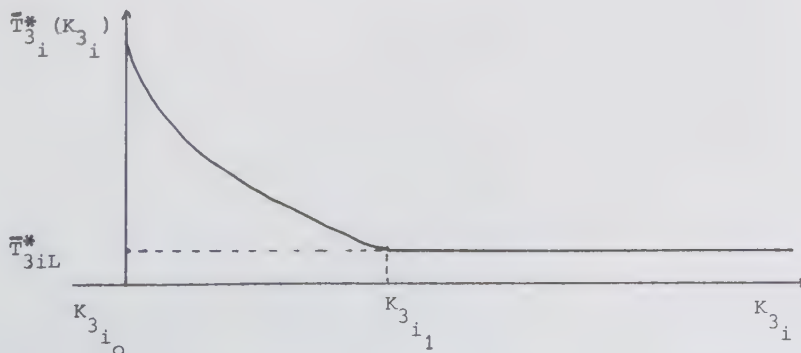
Compte tenu du nombre de type de sous-ensembles, la méthode de la programmation dynamique conduit à calculer les fonctions d'utilité $\bar{T}_{3i}^*(K_{3i})$ pour des valeurs K_{3i} bien supérieures aux coûts K_{3i} qui seront retenus dans la solution optimale.

En faisant l'hypothèse selon laquelle les valeurs $\bar{T}_{3i}^*$ correspondant à la solution optimale seront toutes inférieures à une valeur limite $\bar{T}_{3iL}^*$ (ex : $\bar{T}_{3iL}^* = 10^{-10}$), on peut diminuer les temps de calcul de la politique des stocks.

Ainsi la fonction d'utilité réelle $\bar{T}_{3i}^*(K_{3i})$ dont le graphique a l'allure :

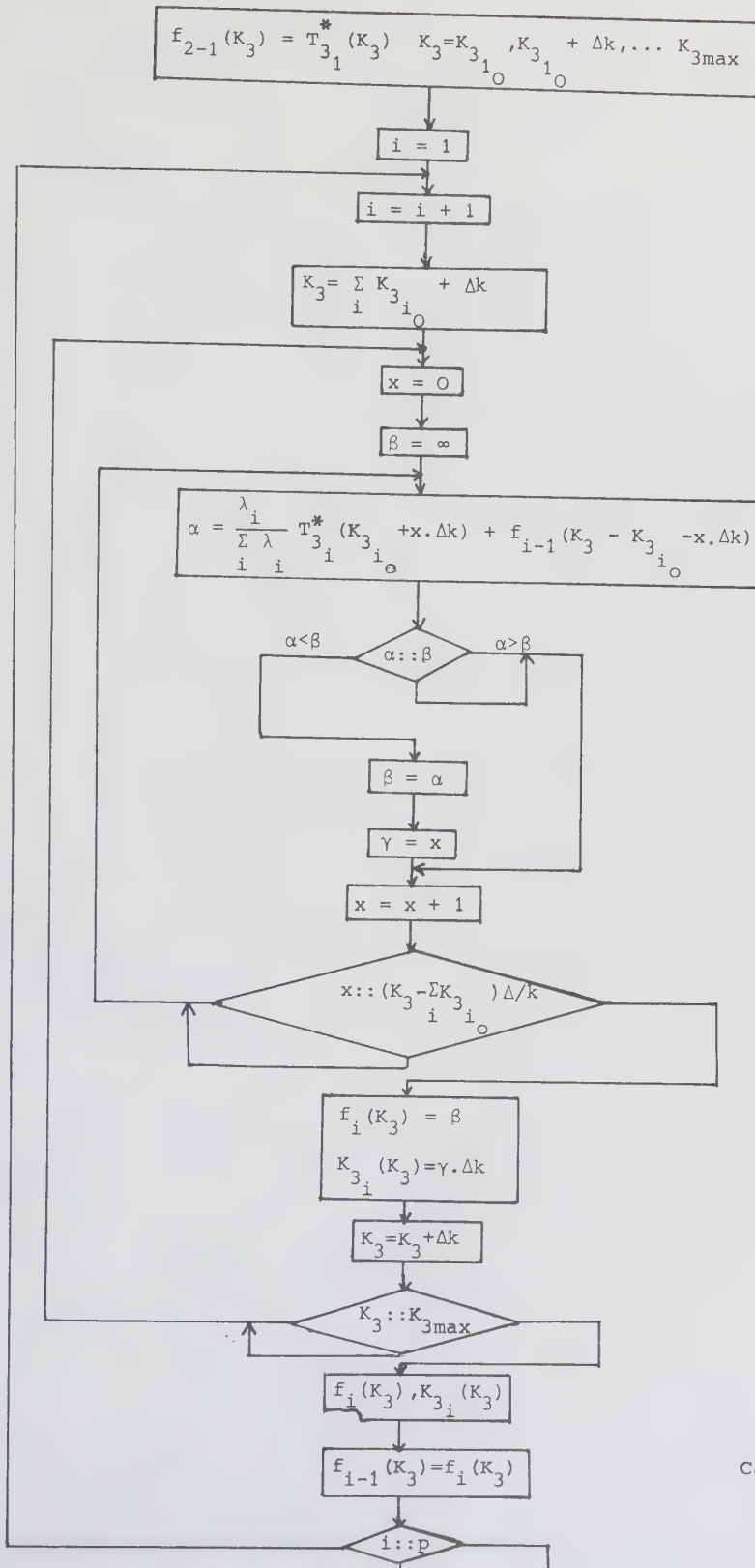


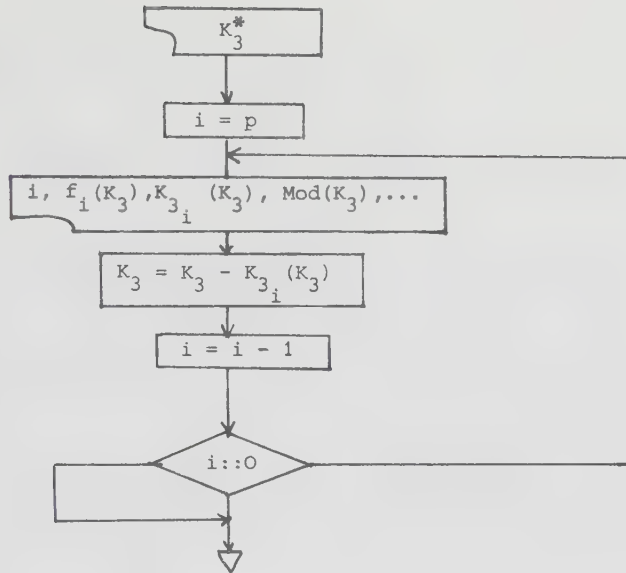
sera remplacée dans le calcul par une fonction d'utilité ayant l'allure suivante :



Ce qui permet de ne calculer la fonction d'utilité que sur l'intervalle $\left[K_{3i_0}, K_{3i_1} \right]$. Il y aura lieu de vérifier que la solution finale ne comprend pas une politique de stocks où l'un des temps $\bar{T}_{3i}^*$ serait égal à $\bar{T}_{3iL}^*$.

Au cours de la programmation dynamique on procède de la même façon avec la fonction $f_N(K_3)$.

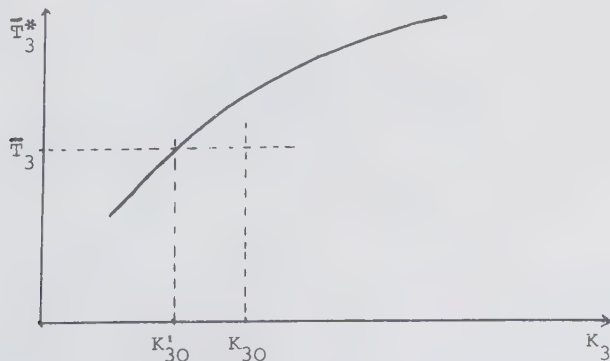




Recherche des caractéristiques de la politique optimale des stocks.

III - 2.9.2. Optimisation de la maintenance :

La variable aléatoire " I_2 " dépend de " x " mais ne dépend pas de $\{y_1, \dots, y_p\}$. Nous avons déjà vu que " T_3 " ne dépendait pas de " x ". Donc une maintenance optimale comprendra un stock optimal. En effet, s'il existait une maintenance optimale avec une valeur $\bar{T}_3(y_1, \dots, y_p)$, entraînant un coût " k_{30} ", qui ne corresponde pas à un stock optimal sous la contrainte " k_{30} ", on pourrait trouver un stock optimal de même "temps moyen d'attente" avec un coût " $k'_{30} < k_{30}$ " :



Le coût variable à minimiser peut s'écrire :

$$K = K_2(x) + K_3(\bar{T}_3^*)$$

A une valeur de "x" correspond une valeur de " K_2 " et réciproquement.

Il y a aussi correspondance biunivoque entre " K_3 " et " $\bar{T}_3^*$ " (chapitre précédent). Donc, si nous savons définir :

$$\bar{N} = \bar{N}_1(x, \bar{T}_3^*)$$

nous pouvons écrire la disponibilité en fonction de K_2 et K_3 :

$$\bar{N} = \bar{N}(K_2, K_3)$$

Pour une valeur constante de " K_2 ", une augmentation de " K_3 " entraîne une augmentation de " $\bar{N}$ ". De même, si " K_3 " est fixé, " $\bar{N}$ " croît avec " K_2 ".

Supposons le problème continu et représentons la quantité " $n\bar{N}(K_2, K_3)$ " dans un espace E^3 . L'ensemble des points définit une surface S :

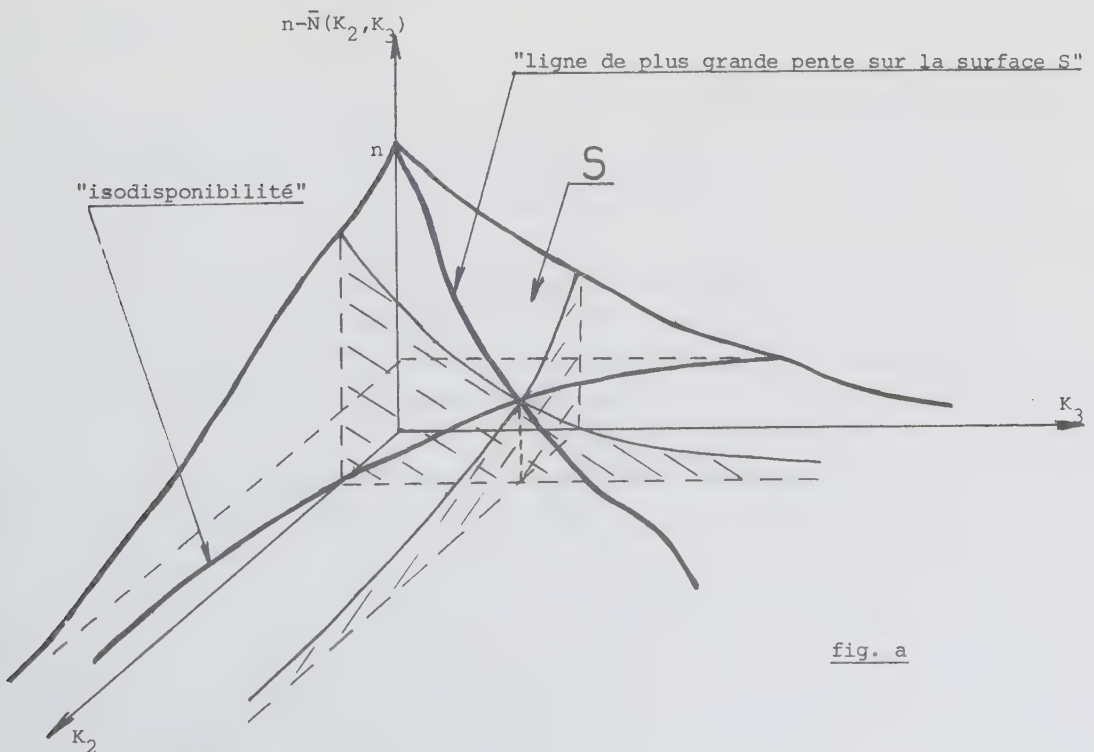


fig. a

Partons d'une position arbitraire en donnant aux variables de décision des valeurs très faibles par rapport à celles qui constitueront la solution. Cette position de départ nécessite un coût variable $k_0 = k_{20} + k_{30}$ et permet d'obtenir une disponibilité " $\bar{N}_d$ " bien inférieure à la contrainte "an", (que nous appelons aussi $\bar{N}_0$).

Investissons ensuite dans la maintenance une somme " Δk " attribuée en entier, soit à la phase 2 (réparation), soit à la phase 3 (stock).

L'addition d'une somme " Δk " à la réparation permettrait d'obtenir une nouvelle disponibilité " $\bar{N}_1$ ".

L'addition de la somme " Δk " aux stocks permettrait d'obtenir une nouvelle disponibilité " $\bar{N}_1$ ".

Le critère de choix sera le suivant : la solution choisie sera celle qui augmente le plus la disponibilité.

Le procédé sera répété jusqu'à ce que la contrainte sur la disponibilité soit satisfaite.

Nous voyons à l'aide de la figure a que, s'il n'existe qu'une "ligne de plus grande pente", les positions intermédiaires se rapprocheront de la "ligne de plus grande pente" puis évolueront de part et d'autre avec un éloignement plus ou moins grand suivant le pas " Δk ".

Nous pensons qu'il ne peut exister qu'une seule "ligne de plus grande pente" car les variables de décisions étant supposées continues, une courbe $\bar{N}_2(x, \bar{T}_{30}^*)$ pour $\bar{T}_{30}^*$ constant a une concavité dont le signe ne change pas (respectivement $\bar{N}_3(x_0, \bar{T}_3)$ pour x_0 constant).

A partir de la figure a, représentons les projections des "isodisponibilités" sur $(K_2, 0, K_3)$.

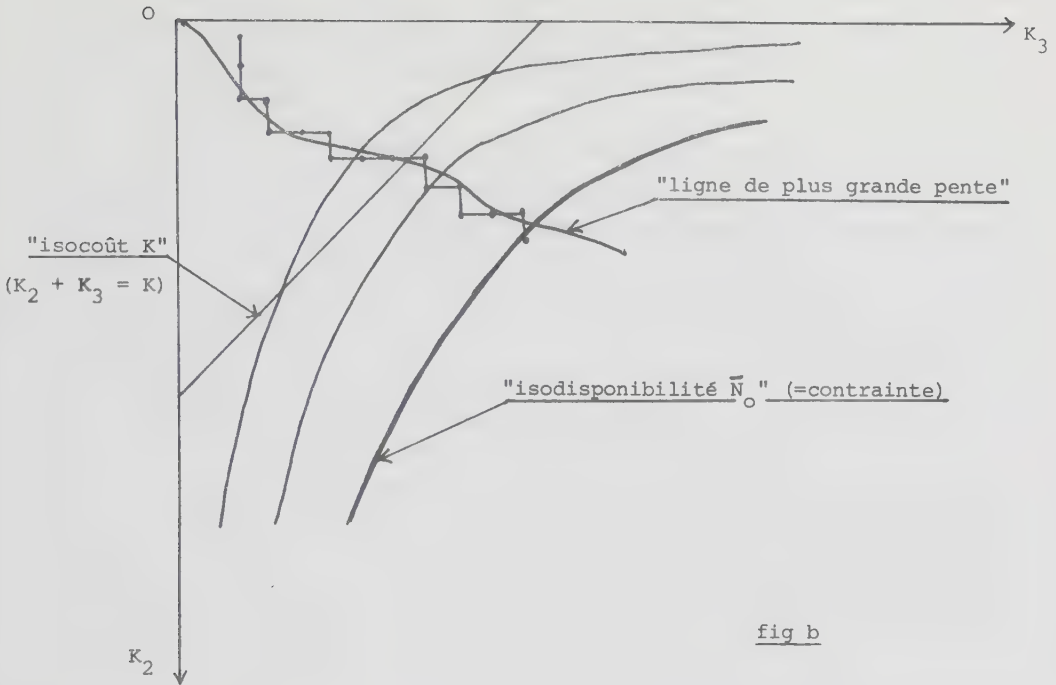


fig b

La figure b permet aussi de représenter les "isocoûts" de façon très simple.

On remarque qu'on peut prendre un grand pas ΔK au début pour le diminuer lorsque les positions successives approchent de la solution optimale. Si la contrainte est dépassée, la "ligne de plus grande pente" peut être "remontée" (avec un pas plus petit) ; on enlève alors " ΔK " à " K_1 " si c'est avec la phase "i" qu'on diminue le moins la disponibilité.

On peut donc trouver un algorithme de calcul qui, en fonction du signe de l'écart entre la disponibilité d'une position et la contrainte, fera "remonter" ou "descendre" les positions successives le long de la "ligne de plus grande pente". Ceci permet de partir d'une position quelconque. Les calculs, pour obtenir la disponibilité, sont longs ; on aura donc intérêt à partir d'une position plausible avec les valeurs des paramètres internes.

Dans la réalité, les variables de décisions sont discrètes, mais on peut trouver un algorithme de calcul avec un raisonnement supplémentaire qui consiste à déplacer la position sur un "isocoût".

Si le prix de revient d'un ouvrier supplémentaire est " Δk ", la quantité " K_2 " ne peut être augmentée ou diminuée que d'un multiple de " Δk ". Aussi, tant que la contrainte n'aura pas été atteinte, on ne prendra pas une valeur " ΔK " différente d'un multiple de " Δk ". On suppose qu'il n'existera jamais deux valeurs successives de $\bar{n}_3^*$ telles que la différence de leur coût respectif soit supérieure à " Δk "; en effet, nous ne voyons pas d'exemple où l'addition d'une pièce en stock entrainerait un coût plus élevé que l'addition d'un ouvrier supplémentaire.

Exprimons à l'aide de la figure c (ci-après) le procédé de calcul des dernières positions compte tenu des valeurs discrètes des variables de décision. Lorsqu'on atteint la contrainte de disponibilité à la $n^{\text{ième}}$ position calculée (A) cela veut dire que les positions $n^{\text{ième}}$ et $(n-1)^{\text{ième}}$ sont de part et d'autre de l'isodisponibilité de valeur " $\bar{N}_O$ " :

- si au $n^{\text{ième}}$ calcul la valeur du pas " ΔK " est égale à " Δk ", on cherche la position la plus proche de la contrainte en diminuant K_3 (avec K_2 constant) ; on obtient le point B. Ce point B se trouve sur un "isocoût" K_E . On cherche alors s'il existe d'autres positions sur l' "isocoût" K_E qui satisfont la contrainte " $\bar{N}_O$ ". Dans l'affirmative, on trouve un point A' ; repartant de A', on trouve un point B' en diminuant K_3 (en laissant K_2 constant) ; B' est sur un nouvel "isocoût" K'_E . S'il n'existe pas de point A' sur ce nouvel "isocoût" K'_E , B' est la solution optimale.

- si au $n^{\text{ième}}$ calcul le pas " ΔK " est supérieur à " Δk ", on "remontera la pente" avant de se livrer au même raisonnement.

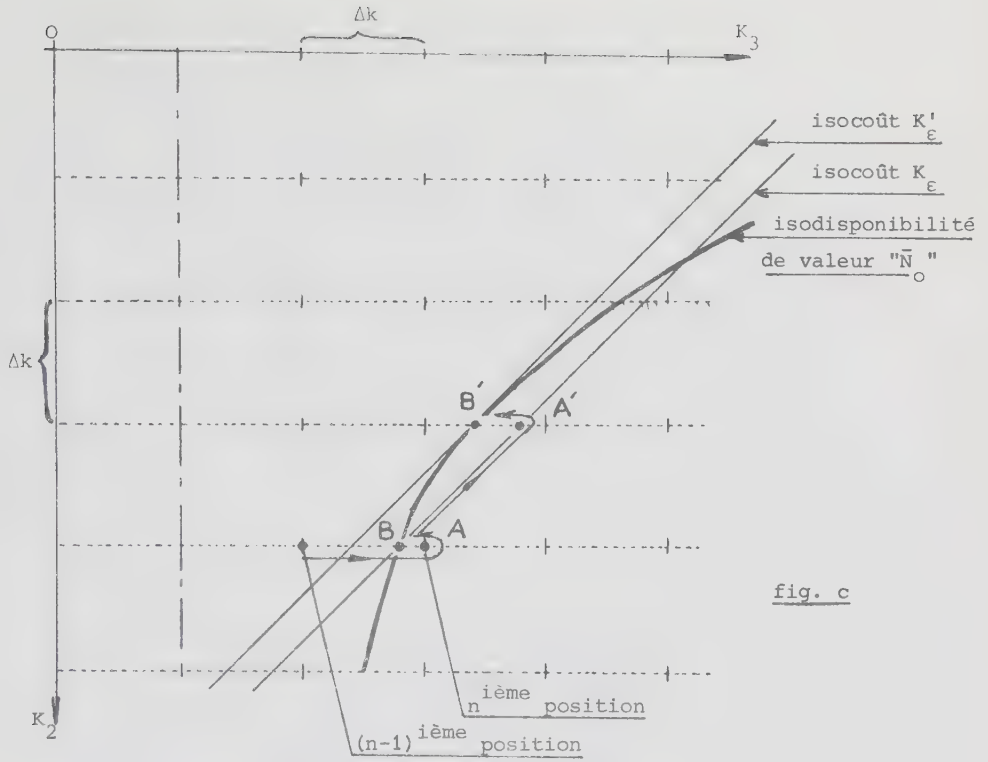
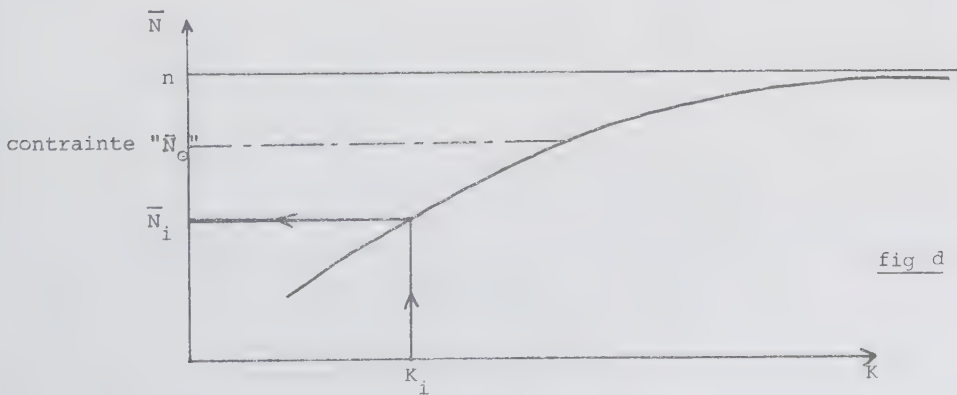


fig. c

Détermination de " ΔK " :

La courbe représentant la disponibilité d'une maintenance optimale en fonction de son coût sera de la forme :



Si les positions successivement calculées étaient toutes sur la "ligne de plus grande pente", à un coût " K_i " correspondrait une disponibilité " $\bar{N}_i$ ". Mais le $i^{\text{ème}}$ calcul donnera certainement une disponibilité " $\bar{N}'_i$ " inférieure à " $\bar{N}_i$ " car la $i^{\text{ème}}$ position ne sera sans doute pas sur la "ligne de plus grande pente". Si l'écart $\epsilon_i = \bar{N}_i - \bar{N}'_i$ est relativement faible, ce qui veut dire que la $i^{\text{ème}}$ position n'est pas très éloignée de la "ligne de plus grande pente", on pourra approcher une détermination de " ΔK " en considérant deux calculs successifs (N'_i, K_i) et (N'_{i+1}, K_{i+1}) . Si on néglige ϵ_i et ϵ_{i+1} , le coût K nécessaire pour réaliser la disponibilité " N_0 " sera supérieur à :

$$K_{i+1} + \delta K = K_{i+1} + (K_{i+1} - K_i) \times \frac{(\bar{N}_0 - \bar{N}'_{i+1})}{(\bar{N}'_{i+1} - \bar{N}'_i)}.$$

d'après la figure e :

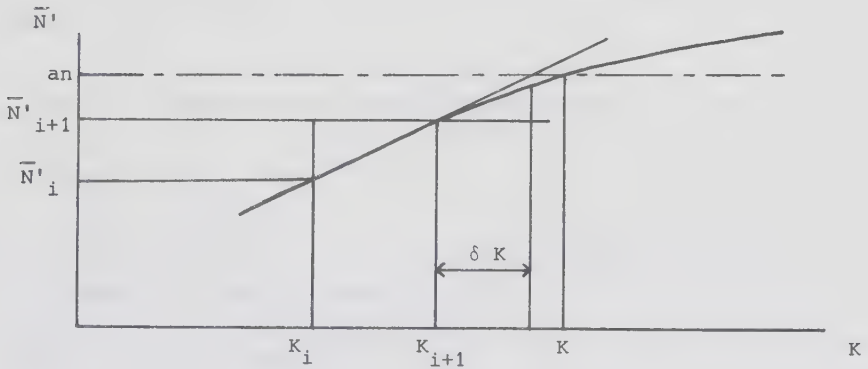


fig e

Donc, une première idée serait de prendre :

$$\Delta K = \text{Max} \left\{ \left[\frac{|\delta K|}{\Delta k} \right] \cdot \Delta k, \Delta k \right\}$$

Mais si, au moment où la contrainte de disponibilité est franchie la position est éloignée de la "ligne de plus grande pente", les calculs suivants vont être assez longs. Aussi pour diminuer l'écart éventuel avec la "ligne de plus grande pente" nous pensons prendre :

$$\Delta K = \text{Max} \left\{ \left[\frac{|\delta K|}{2\Delta k} \right] \Delta k, \Delta k \right\}.$$

Un organigramme sommaire de tout le processus d'optimisation du système est représenté à la fin du chapitre (planche P3/XII).

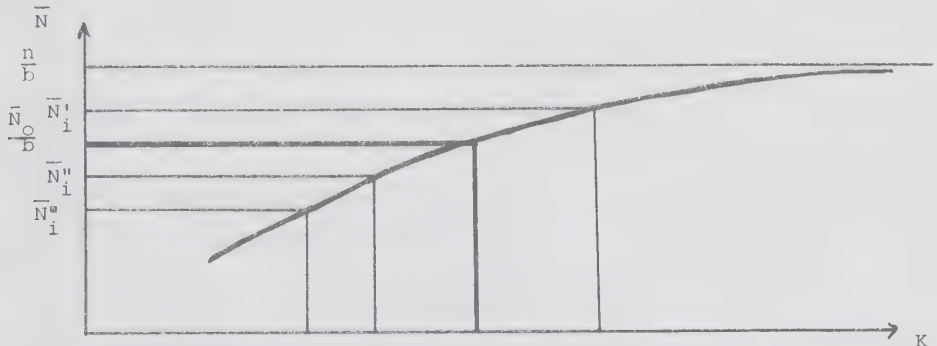
L'organigramme suivant (planche P3/XIII) est une représentation plus complète de la partie principale de l'algorithme de calcul de la méthode du gradient discrète. L'organigramme est quelque peu compliqué car on veut avoir la possibilité de partir d'une valeur arbitraire (but des variables "Inf." et "Sup."). La variable "A" permet de ne rechercher le point B que si la position $(i - 1)^{\text{ème}}$ correspond bien au point A.

III - 3 : MODELE A "b" ATELIERS IDENTIQUES RESPONSABLES D'UNE PROPORTION

"1"
b DU PARC.

Dans ce cas on minimisera le coût d'un atelier sous une contrainte de disponibilité " $\frac{\bar{N}_0}{b}$ ".

En effet, si la disponibilité en fonction du coût a bien la forme :



Des contraintes identiques " $\frac{\bar{N}_0}{b}$ " coûteront moins que des contraintes N_i différentes mais telles que :

$$\sum_i \bar{N}_i = \bar{N}_0.$$

Rappelons que ceci n'est vrai que si le parc de chacun des ateliers est " $\frac{n}{b}$ " puisque la valeur " $\frac{n}{b}$ " intervient dans le calcul de la disponibilité (à cause du phénomène aléatoire, plus le parc est petit et plus la main-

tenance est relativement onéreuse pour un même pourcentage "a" de la contrainte de disponibilité).

III - 4 : MODELE A "b" ATELIERS AYANT DES PARCS DIFFERENTS.

Prenons l'exemple de trois ateliers A, B, C, respectivement responsable de n_A , n_B , n_C ensembles ($n = n_A + n_B + n_C$).

La disponibilité du système complet s'écrit :

$$\bar{N} = \bar{N}_A + \bar{N}_B + \bar{N}_C$$

La contrainte est encore :

$$\bar{N} \geq \bar{N}_O$$

c'est-à-dire que le choix de $\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$, $\bar{N}_C$ reste libre sur le plan :

$$\bar{N}_A + \bar{N}_B + \bar{N}_C = \bar{N}_O$$

Dans le cas contraire, le problème revient à résoudre trois fois le problème d'optimisation pour un atelier tel qu'il a été traité au chapitre III - 2.

Appelons $\{N\}$ le triple quelconque $(\bar{N}_A, \bar{N}_B, \bar{N}_C)$ tel que $\bar{N}_A + \bar{N}_B + \bar{N}_C = \bar{N}_O$.

Soit (N) l'ensemble des triples $\{N\}$.

Soit $\{N\}_O$ le triple initial défini par :

$$\bar{N}_{A_O} = \frac{n_A}{n} \bar{N}_O, \bar{N}_{B_O} = \frac{n_B}{n} \bar{N}_O, \bar{N}_{C_O} = \frac{n_C}{n} \bar{N}_O$$

Soit $(K_2^*, K_3^*)_O$ la politique optimale de l'atelier A sous la contrainte $\bar{N}_A \geq \bar{N}_{A_O}$.

De même, soit $(K_{2_B}^*, K_{3_B}^*)_O$, $(K_{2_C}^*, K_{3_C}^*)_O$...

L'ensemble $\{(K_{2_A}^*, K_{3_A}^*)_O, \dots, (K_{2_C}^*, K_{3_C}^*)_O\}$ est la politique

optimale de la maintenance sous la contrainte $\{N\}_O$ mais il ne l'est pas a priori sous la contrainte de $\bar{N}_O$.

Il faut donc trouver le triple $\{N\}^*$ tel que

$$K^* = \min_{\{N\} \in (N)} [K_{2A}^* (\{N\}) + K_{3A}^* (\{N\}) + \dots + K_{3C}^* (\{N\})]$$

Méthode de recherche de $\{N\}^*$.

Soit $\Delta \bar{N}$ un pas suffisamment petit de $\bar{N}_0$.

Partant de la solution initiale correspondant au triple $\{N\}_0$, on retranche $\Delta \bar{N}$ de la contrainte $\bar{N}_i$ d'un atelier "i" pour l'ajouter en supplément à la contrainte $\bar{N}_j$ d'un atelier "j" :

- l'atelier "i" sera celui pour lequel la soustraction de $\Delta \bar{N}$ à la contrainte entraînera le plus grand gain K_G .

- l'atelier "j" sera celui pour lequel l'addition de $\Delta \bar{N}$ à la contrainte entraînera la plus petite perte K_p .

On retiendra la dernière solution avant de trouver $K_p > K_G$.

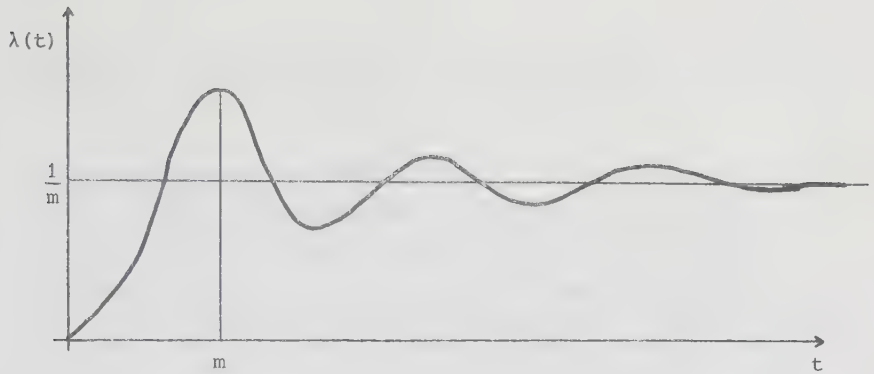
III - 5 : CAS DU MATERIEL NON ELECTRONIQUE EN REGIME STABILISE.

Dans les chapitres précédents, le modèle de maintenance est supposé s'adapter à du matériel de technologie électronique ayant un taux de mortalité constant. Ce qui est important pour la validité du modèle, ce n'est pas que le matériel considéré soit de technologie électronique, mais que son taux de mortalité soit constant.

Il s'agit maintenant de voir dans quelle mesure le modèle peut s'adapter à un matériel de technologie quelconque.

Dans ce but, examinons le cas d'un parc de matériels dont la fonction densité de fiabilité est une loi de probabilité quelconque $\mu(m, \sigma)$. Si l'on néglige le temps de réparation devant le temps d'utilisation, le théorème dit "du renouvellement" permet d'écrire que le taux de mortalité d'un matériel $\lambda(t)$ tend vers la valeur $\frac{1}{m}$.

Ainsi, si μ est une loi normale $N(m, \sigma)$, le taux de mortalité tendra vers une valeur limite $\frac{1}{m}$, après avoir oscillé pendant un certain temps.



Le taux d'un parc de i ensembles tendra encore plus rapidement vers la valeur $\frac{1}{m}$ s'il est désordonné (i.e. : temps de fonctionnement hétérogènes) ou si le parc est mis en place selon plusieurs tranches d'un "programme de fabrication".

On constate ainsi qu'au bout d'un certain temps (v.s. de la loi de fiabilité), le taux de mortalité pourra être considéré comme constant (régime que nous qualifierons de "stabilisé"). La méthode d'optimisation précédente est alors applicable au système de maintenance de ce matériel.

Dans le complément C-III 5, on a recherché la valeur transitoire du taux de mortalité $\lambda(t)$ correspondant à une loi de fiabilité γ d'ordre 4.

Pour trouver le taux de mortalité limite, on n'a pas besoin de connaître tous les paramètres de la fonction de fiabilité du matériel ; seule la moyenne est nécessaire. Par contre, il est intéressant de connaître cette moyenne le plus rapidement possible. Il semble que la méthode la plus fructueuse soit celle de Weibull [12]. Cette méthode graphique (cf. chapitre II-2.1.1.2) permet de trouver la moyenne alors que l'échantillon (qui peut être désordonné) n'est pas encore épuisé.

Au niveau de la fiabilité prévisionnelle, les connaissances relatives aux pièces mécaniques étant assez faibles, on pourra néanmoins tenter d'approcher un taux de mortalité théorique par comparaison avec des matériels similaires ; ce qui permettra d'attendre les résultats de la fiabilité d'exploitation.

C-III 5 : Détermination du taux de mortalité d'un parc homogène pour une loi de fiabilité γ d'ordre 4.

Dans l'hypothèse où le temps de réparation est négligeable par rapport au temps de service entre deux défaillances, chercher le taux de mortalité revient à chercher le taux de consommation d'un parc dans lequel on remplace le matériel au lieu de le réparer. Cette remarque permet de ramener le problème à une étude de taux d'approvisionnement, phénomène bien connu des spécialistes.

Soit n la grandeur du parc et $R(t)$ la fonction de fiabilité d'un matériel.

Soit $Q(t)$ la quantité de matériels tombés en panne sur l'intervalle de temps $[0, t]$.

Parmi les matériels tombés en panne sur l'intervalle $[u, u+du]$, la quantité qui n'est pas retombée en panne sur $]u+du, t]$ a pour expression

$$\frac{dQ(u)}{du} \times R(t - u)$$

En écrivant que la somme des matériels existants reste égale à n , on obtient :

$$n.R(t) + \int_0^t \frac{dQ(u)}{du} \cdot R(t - u) \cdot du = n$$

On reconnaît une intégrale de Volterra.

Pour déterminer $Q(t)$, appliquons la transformation de Laplace.

Le théorème de Borel permet d'écrire :

$$\frac{n}{p} = n \cdot \int_0^\infty (R(t)) \cdot e^{-pt} dt + \int_0^\infty \left(\frac{dQ(t)}{dt} \right) \cdot \int_0^\infty (R(t)) \cdot e^{-pt} dt \cdot e^{-pt} dt$$

A part certains cas comme celui de la loi de fiabilité exponentielle, il semble plus simple de résoudre cette équation en passant par la fonction densité de mortalité :

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(t) \cdot dt$$

Auquel cas :

$$\int (R(t)) = \frac{1}{p} - \frac{f^*(p)}{p}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\int \left(\frac{dQ(t)}{dt} \right) = \frac{\frac{n}{p} - \frac{n}{p} [1 - f^*(p)]}{\frac{1}{p} [1 - f^*(p)]}$$

Mais :

$$\int \left(\frac{dQ(t)}{dt} \right) = p \cdot Q^*(p) - Q(0) \text{ avec } Q(0) = 0$$

Donc :

$$Q^*(p) = \frac{f^*(p)}{p[1 - f^*(p)]}$$

A titre d'exemple, recherchons l'original $Q(t)$ pour une loi de probabilité γ d'ordre 4 :

$$f(t) = \frac{\beta(\beta t)^3}{3!} e^{-\beta t}$$

On sait que $f^*(p) = \left(\frac{\beta}{\beta + p} \right)^4$

$$\text{car } \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\beta(\beta t)^3}{3!} e^{-\beta t} dt = \left(\frac{\beta}{\beta + p} \right)^4 \int_0^\infty \frac{(\beta+p)}{3!} \frac{[(\beta+p)t]^3}{3!} e^{-(\beta+p)t} dt = \left(\frac{\beta}{\beta+p} \right)^4$$

Ce qui permet d'écrire :

$$Q^*(p) = \frac{\beta^4}{p^2(2\beta + p)(2\beta^2 + 2\beta p + p^2)}$$

En décomposant en éléments simples :

$$Q^*(p) = \frac{\beta}{4p^2} - \frac{3}{8p} + \frac{1}{8(p+2\beta)} + \frac{p+2\beta}{4(p^2+2\beta p+2\beta^2)}$$

On retrouve l'original $Q(t)$ à l'aide d'une table des transformées :

$$Q(t) = \frac{\beta t}{4} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8} e^{-2\beta t} - \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\beta t} \sin(\beta t - \phi) + \frac{1}{2} e^{-\beta t} \sin \beta t$$

$$\text{avec } \tan \phi = 1 \longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$Q(t) = \frac{\beta t}{4} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8} e^{-2\beta t} + \frac{1}{4} e^{-\beta t} (\sin \beta t + \cos \beta t)$$

Le taux de mortalité étant égal à $\frac{dQ(t)}{dt}$:

$$Q'(t) = \frac{\beta}{4} - \frac{\beta}{4} e^{-2\beta t} - \frac{\beta}{2} e^{-\beta t} \sin \beta t$$

$$= \frac{\beta}{4} \left[1 - e^{-\beta t} (e^{-\beta t} + 2 \sin \beta t) \right]$$

La représentation graphique de $Q'(t)$ est faite planche P 3 - XIV.

III - 6 : REFLEXIONS SUR LE CHOIX DU TYPE DE LA CONTRAINTE :

Dans ce travail, c'est la disponibilité du parc qui a été choisie comme contrainte pour minimiser le coût de la maintenance. Ce choix semble raisonnable puisque c'est sans doute par ce critère de disponibilité que tout responsable de la gestion d'un parc considérerait le caractère opérationnel de son matériel.

Mais on pourrait penser prendre d'autres critères. Ainsi, une deuxième contrainte pourrait être exprimée sur le caractère de dispersion des états possibles du parc ; le moment centré (sur $\bar{N}_0$) d'ordre 2 pourrait être retenu, mais il semble préférable de ne prendre en considération que les distributions de la V.A. situées à gauche de $\bar{N}_0$; en effet, on n'a pas, dans notre problème, à se préoccuper du caractère de dispersion des distributions situées à droite de $\bar{N}_0$. Dans ce cas, la contrainte s'écrit :

$$\begin{aligned} & [\bar{N}_0] \\ & \sum_{i=0} (\bar{N}_0 - i)^2 p_i \leq \eta_0 \end{aligned}$$

Sans vouloir introduire cette deuxième contrainte dans le système, il semble intéressant de citer un fait constaté quasiment sur tous les exemples numériques effectués : de toutes les politiques potentielles

situées sur l'isocoût K correspondant à la solution optimale (sous la contrainte $\bar{N}_0$), c'est la politique optimisée qui possède la dispersion la plus faible. Dans de rares cas, une autre politique possède le caractère de dispersion minimal mais l'écart est si faible que cela peut s'expliquer par le caractère discret de la méthode.

Un tel exemple est illustré planche P.3/XV ; on y a représenté, en fonction des politiques possibles situées sur le même isocoût, trois caractères de dispersion, à savoir :

$$\sum_{i=0}^{i=n} (\bar{N}_0 - i)^2 p_i$$

$$\sum_{i=0}^{i=\lceil \bar{N}_0 \rceil} (\bar{N}_0 - i)^2 p_i$$

et

$$\sum_{i=0}^{i=n} (\bar{N} - i) p_i$$

car les politiques situées sur un même isocoût n'ont pas la même disponibilité.

On constate que les trois facteurs de dispersion mesurés présentent un minimum aux environs de la solution optimale et que les écarts entre les valeurs correspondant à la solution optimale ($X = 7$) et les minimums ($X = 8$) sont quasi-insignifiants.

IV - APPLICATIONS NUMERIQUES

IV - 1 : PREMIER EXEMPLE.

IV - 1.1. : Présentation des données.

Soit un parc de 64 ensembles pour lequel la disponibilité moyenne $\bar{N}$ doit être égale ou supérieure à 60.

Chaque ensemble est composé de quatre sous-ensembles pouvant tomber en panne.

Les délais de livraison suivent une loi de probabilité exponentielle ; les taux respectifs μ_i des dites lois, ainsi que les coûts C_i et les taux de défaillance λ_i de chacun des sous-ensembles sont donnés par le tableau suivant :

S/ens.	C_i	λ_i	μ_i
1	30 000 F	0,2	2
2	6 000 F	0,4	4
3	6 000 F	0,8	10
4	3 000 F	0,8	4

Le prix de la passation d'une commande est de 50 F et on suppose que le prix de l'intérêt de l'argent est de 10 %.

D'autre part, la durée de transport et la durée de réparation suivent chacune une loi de probabilité exponentielle de taux respectifs 150 et 50.

IV - 1.2. : Politique des stocks.

A titre de comparaison, donnons les quantités de commandes correspondant à la formule de Wilson :

$$(Q_W^*)_i = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda_i \cdot N_O \cdot A}{IC}}$$

Soit :

$$(Q_W^*)_1 = \sqrt{\frac{2.0,2.60.50}{30 \ 000.0,1}} = (0,6) = 1$$

$$(Q_W^*)_2 = (2) = 2$$

$$(Q_W^*)_3 = (2,83) = 3$$

$$(Q_W^*)_4 = (4) = 4$$

Les quantités retenues sont les valeurs entières les plus voisines car on ne peut commander que des quantités entières et non nulles.

La représentation du chemin optimal relatif à chacun des sous-ensembles pour le seul cas du modèle $\langle Q, M \rangle$ est donnée planche P 4/I. On remarque que chacun des chemins optimaux se développe autour d'une valeur moyenne de commande supérieure à celle donnée par la formule de Wilson correspondante ; la différence étant d'autant plus sensible que Q_W^* est grand.

Dans la politique des stocks des sous-ensembles 1 et 2, le modèle $\langle Q = 1, R \rangle$ entre en considération ; mais il ne figure pas sur la représentation graphique puisque cela reviendrait à tracer une droite $Q = 1$.

IV - 1.3. : Politique globale.

La planche P 4/II montre le chemin "optimal" (sur le plan K_2OK_3) suivi par le processus d'optimisation au cours des calculs.

La politique retenue permet d'obtenir une disponibilité moyenne de 60,0088 avec un investissement humain de 5 ouvriers (soit 100 000 F) et

un investissement en matériel décrit par le tableau suivant :

S/ens.	Modèle	Q	R ou M	coût fixe	coût variable
1	2	1	11	800	13 200
2	2	1	15	1200	4 800
3	3	3	17	800	7 200
4	3	5	31	400	5 200

Soit un investissement en coût variable pour l'ensemble des stocks de 30 400 F.

On remarque que les niveaux de sécurité retenus, $(M - Q)$ ou R , varient dans l'ordre inverse des coûts des sous-ensembles.

La planche P 4/III représente le caractère de dispersion des probabilités d'état du parc pour les politiques possibles situées sur l'isocoût contenant la solution optimale, et voisines de celle-ci. On constate que c'est la solution optimale qui possède la plus faible dispersion.

IV - 2 : DEUXIEME EXEMPLE.

Celui-ci illustre le cas où le parc est soutenu par plusieurs ateliers possédant des structures identiques mais responsables de quantités différentes d'ensembles. (ce qui correspond à la théorie du paragraphe III - 4).

On a considéré un parc de 40 ensembles dont la maintenance est assurée par 3 ateliers A, B, C respectivement responsables de 20, 12, et 8 ensembles.

Dans cet exemple, la disponibilité doit être égale ou supérieure à 35.

Afin de diminuer les temps de calcul, on a considéré que les stocks ne comprenaient que deux types de sous-ensembles et que seul le modèle $\langle Q, r \rangle$ était envisagé.

La planche P 4/IV schématise les résultats obtenus ; au début, la maintenance, optimisée au niveau de chaque atelier, est d'un coût de 216 unités ; après deux cycles de calcul, on arrive à une maintenance globalement optimisée d'un coût de 213 unités. En effet, avant l'optimisation inter-ateliers, le coût variable de l'ensemble des politiques de stock était de 6 unités ; à la fin de l'optimisation, ce coût variable n'est plus que de 3 unités.

IV - 3 : COMPARAISON DE LA METHODE PROPOSEE AVEC UNE METHODE PLUS SIMPLE.

Définissons d'abord cette méthode "simple" mais non dénuée de bon sens :

Le nombre d'ouvriers est tel qu'il soit juste suffisant à absorber un flot constant d'arrivée de valeur $n.\lambda_e$; soit :

$$x = \left[\frac{n\lambda_e}{\mu_2} \right] + 1$$

La politique des stocks est élaborée avec des systèmes $\langle Q, r \rangle$ tels que :

- les quantités de commande Q sont données par la formule de Wilson.

- les niveaux de confiance r sont égaux au double de la demande probable par délai de livraison. (la disponibilité étant préalablement fixée à une valeur raisonnable $\bar{N}_r$ pour déterminer un flot moyen d'arrivée).

Les paramètres du système étant ainsi fixés, on peut calculer la disponibilité correspondant à cette politique de maintenance.

Cette dernière disponibilité sert alors de contrainte pour le calcul du système optimisé ; ce qui permet la comparaison des deux méthodes.

L'exemple numérique porte sur un parc de 40 ensembles composés de

deux sous-ensembles ($\lambda_1 = 0,6$, $\lambda_2 = 1,2$). Les taux de remise en service des systèmes S_1 et S_2 sont respectivement $\mu_1 = 50$ et $\mu_2 = 30$.

Avec la méthode simple, on obtient :

{	nombre d'ouvriers	$X = 4$	
	stocks du sous-ensemble 1	$Q = 14$	$r = 15$
	stocks du sous-ensemble 2	$Q = 28$	$r = 25$.

A ces valeurs correspond une disponibilité de 36,156.

Sous cette contrainte, le modèle de maintenance optimisée donne la solution suivante :

{	nombre d'ouvriers	$X = 4$	
	stocks du sous-ensemble 1	$Q = 24$	$r = 11$
	stocks du sous-ensemble 2	$Q = 39$	$r = 24$.

On remarque que, pour cet exemple particulier, le nombre d'ouvriers est le même dans les deux cas. Par contre, les caractéristiques des stocks sont différentes ; alors que pour le premier cas, le coût variable de la politique de stock était de 52,1, celui de la maintenance optimisée est inférieur à 48,8 ; ce qui représente un gain supérieur à 6,4 %.

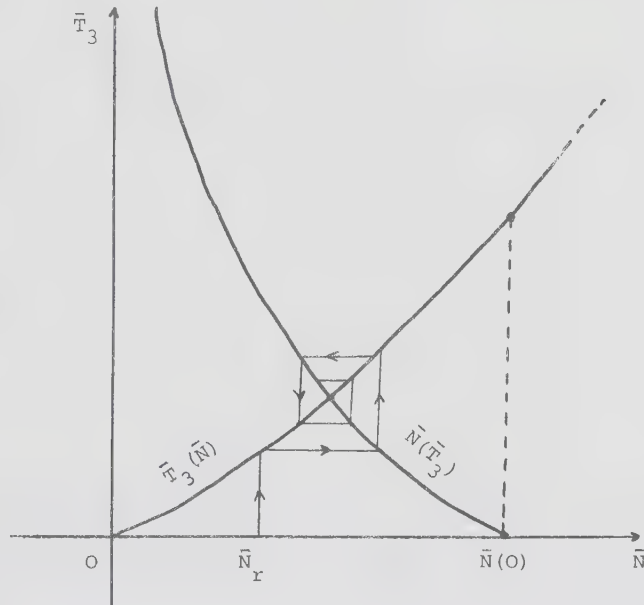
Remarque :

La détermination de la disponibilité correspondant à la politique obtenue par la méthode simplifiée est assez longue. En effet, il est préalablement nécessaire de connaître le temps moyen d'attente pour manque de stock $\bar{T}_3$. Or, ce dernier paramètre ne peut se calculer que si l'on connaît le flot moyen d'entrée $\bar{N} \cdot \lambda_e$, qui est lui-même inconnu puisque le but du calcul est de chercher $\bar{N}$.

La détermination de $\bar{N}$ ne peut donc être faite que par approximations successives.

On part ainsi de la valeur $\bar{N}_r$ pour trouver une première valeur de $\bar{T}_3(\bar{N}_r)$; cette valeur servant alors pour déterminer une nouvelle disponibilité $\bar{N}(\bar{T}_3)$; cette disponibilité étant à son tour utilisée pour trouver un

nouveau moyen d'attente $\bar{T}_3$. On remarque que cette façon de procéder implique la convergence des calculs ; convergence qui découle de la forme des courbes $\bar{N}(\bar{T}_3)$ et $\bar{T}_3(\bar{N})$:



IV - 4 : INFLUENCE D'UNE IMPRECISION SUR LES TAUX DE MORTALITE.

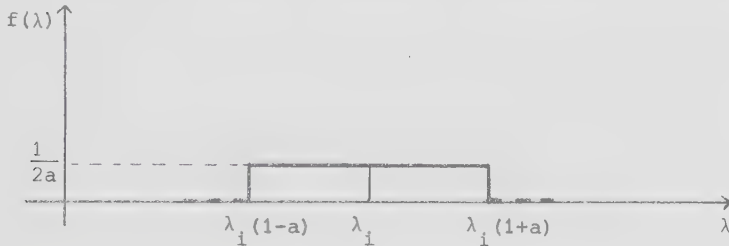
Au cours du chapitre II, on a vu qu'il n'était pas toujours possible de connaître avec précision les taux de mortalité des ensembles, au moins au début de leur vie. L'exemple qui suit a pour but de savoir jusqu'à quel point le système de maintenance optimisée reste valable dans le cas où il existe une certaine incertitude sur les taux de mortalité ; on compte ainsi comparer les effets de cette incertitude à la fois sur la méthode simple de l'exemple précédent et sur la maintenance optimisée.

Définissons d'abord la procédure utilisée. Comme dans l'exemple précédent, il faut définir les caractéristiques de la politique de la maintenance ; d'une part, selon la méthode "simple" et d'autre part, selon la méthode d'optimisation. On dispose ainsi de deux politiques de maintenance donnant la même disponibilité.'

La valeur certaine du taux de mortalité λ_i , $i = 1, 2, \dots, p$ est alors remplacée par une valeur aléatoire λ'_i ; cette dernière valeur est obtenue en générant un nombre aléatoire NAU de loi de densité uniforme sur $[0, 1]$ et lié à λ'_i par la relation :

$$\lambda'_i = \lambda_i [1 - a + 2 \times \text{NAU} \times a]$$

"a" est ce qu'on peut appeler le paramètre d'incertitude puisque la fonction densité de la variable aléatoire λ'_i se représente alors :



Un cycle de calcul comprend :

- la génération de λ'_i , $i = 1, 2, \dots, p$
- la recherche de la disponibilité réelle de la politique dont les caractéristiques sont définies par la méthode simple. La disponibilité étant, comme au paragraphe précédent, calculée par approximations successives.
- la recherche de la disponibilité réelle de la politique de maintenance préalablement optimisée (même méthode).
- la détermination des coûts réels des deux politiques de maintenance.

Ce sont les politiques "simple" et "optimisée" du paragraphe précédent qui sont reprises ici. Les calculs ont été faits pour trois valeurs de a : 10 %, 20 % et 30 %. Dans chaque cas, vingt cycles ont été effectués. Les résultats figurent respectivement sur les planches P 4/V, P4/VI, P 4/VII. On constate que, même lorsque le paramètre d'incertitude est de 30 %, la solution correspondant à la maintenance optimisée est préférable à la solution de la méthode simple.

V - CONCLUSION

V - 1 : RECUEIL ET TRAITEMENT DE L'INFORMATION.

L'utilisation du modèle de maintenance implique plusieurs nécessités :

- la mise en place d'un système de recueil efficace de l'information.
- une interprétation judicieuse des résultats statistiques.
- la possibilité d'utiliser de puissants moyens de calcul.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, il sera nécessaire de procéder à un véritable stockage de l'information collectée.

Cette information doit être recueillie au niveau le plus bas ; c'est-à-dire à l'échelon de l'équipe, voire du réparateur.

Il ne faut pas se dissimuler qu'à ce stade, le principal problème est le facteur humain. Même si ce n'est pas son but, le recueil des temps de réparation risque d'être utilisé comme un moyen de contrôle de la productivité ; et de ce fait, attirer la méfiance. Pourtant, dans le cadre de notre étude, seul le temps réel est retenu pour les calculs ; la notion de rendement à ce niveau étant un autre problème.

Il existe déjà dans certaines entreprises des fiches de fiabilité d'exploitation ; celles-ci permettent de renseigner les fiabilistes sur les incidents survenus aux matériels, puis d'en tirer des conclusions (fréquences des pannes, causes, etc...). On ne peut que conseiller d'ajouter à ces fiches les renseignements concernant la maintenabilité des appareils (temps de réparation, temps de transports, etc...) ; cela permettrait d'obtenir sur un même support tous les renseignements nécessaires à la mise en place de notre système.

L'interprétation statistique des résultats pose les problèmes fréquemment rencontrés en la matière ; à savoir la bonne identification des variables aléatoires mesurées.

Quant aux moyens de calculs, ils doivent être jugés selon les deux critères suivants : la capacité mémoire et le temps d'unité centrale. Si l'on accepte l'hypothèse simplificative du chapitre III - 2 (dont le but est justement de sortir de l'impasse en diminuant la place nécessaire au programme), on peut considérer que la capacité des ordinateurs n'est plus une contrainte. Toutefois, il ne faut pas négliger le temps nécessaire à la réalisation du programme. Ainsi, pour un parc de plusieurs centaines d'unités, l'incidence pécuniaire des calculs d'optimisation ne sera plus négligeable. Un choix sera nécessaire, eu égard au coût financier du parc.

V - 2 : DEVELOPPEMENT EVENTUEL.

Le modèle de maintenance optimisée que nous avons décrit est destiné à une maintenance d'un seul niveau. C'est-à-dire pour un service où tous les ateliers effectuent le même type de réparation. On trouve dans la réalité des organisations de maintenance où la réparation peut se faire à différents niveaux. Dans ce dernier cas, certains ateliers (plus centralisés) effectuent des réparations plus complexes que celles réalisées par d'autres ateliers (plus décentralisés). Il est alors possible d'optimiser indépendamment chaque niveau de réparation. Un modèle plus élaboré permettrait d'optimiser la maintenance globale.

V - 3 : EPILOGUE.

Au terme de cette étude, il est inévitable d'en retirer quelque philosophie.

A notre époque de technique avancée, la Maintenance est obligée de suivre, avec autant de précision, autant de recherche. En qualité de responsable d'un parc de matériel, nous avons été souvent frappé de l'empirisme qui régnait dans la maintenance et nous imaginions que toute entreprise de ce genre se devait de rationaliser au haut point, c'est-à-dire optimiser son exploitation.

Ainsi animé du désir d'avancer dans cette recherche, nous avons essayé d'utiliser les récentes études sur les probabilités, et les possibilités de nos modernes instruments de calcul. Possibilités que l'homme d'aujourd'hui, le chef d'entreprise, l'administrateur,... ne doivent pas ignorer.

Mais notre entreprise a rencontré ses limites.

- Dans la difficulté, difficultés théoriques décuplées par leur transposition au réel, car "le réel est complexe", c'est une loi de nature.
- Dans les possibilités de nos ordinateurs, malgré l'extrême développement actuel de leur capacité.
- Dans la rentabilité, toute réalisation étant toujours un compromis ; et l'économie d'aujourd'hui ne perd pas de vue les termes de l'échange.

La rencontre de ces contraintes nous a fourni tout au long du travail un certain nombre de questions ouvertes qui devraient être la matière de recherches ultérieures.

A-III 272

Distribution du délai τ (d'après [9]) pour passer du niveau r au niveau zéro.

Appelons événement "E" l'arrivée de la $r^{\text{ième}}$ demande pendant l'intervalle $[\tau, \tau + d\tau]$

La réalisation de l'évènement E nécessite la réalisation des deux évènements suivants :

Evènement A : $(r - 1)$ demandes sont arrivées pendant $[0, \tau]$

Evènement B : une demande arrive pendant l'intervalle $[\tau, \tau + d\tau]$

Si le processus des demandes est poissonnien, ces deux évènements ayant respectivement pour probabilité :

$$p(A) = \frac{(\lambda\tau)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda\tau}$$

$$p(B) = \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau$$

sont indépendants ; la probabilité cherchée est donc :

$$p(E) = p(A) \cdot p(B) = \frac{\lambda (\lambda\tau)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda\tau} d\tau$$

On reconnaît la fonction de densité gamma d'ordre r .

Remarque : On sait que $p(A)$ est identique, que l'instant d'origine soit aléatoire ou qu'il coïncide avec l'arrivée de la demande mettant le stock au niveau " r ". En respectant les notations habituelles, on a : $V_r(t) = U_r(t)$.

A-III 27322

Distribution quelconque du délai de livraison

- Extrait de [9]

... Supposons que nous sachions que $n > 0$ évènements poissonniens ont eu lieu dans l'intervalle 0 à t . Calculons la probabilité conditionnelle pour que le premier de ces évènements apparaisse entre t_1 et $t_1 + dt_1$, le deuxième apparaisse entre t_2 et $t_2 + dt_2$, etc... et le $n^{\text{ième}}$ évènement apparaisse entre t_n et $t_n + dt_n$, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. La probabilité pour que n évènements apparaissent dans l'intervalle de temps $(0, t)$ et que le $i^{\text{ième}}$ apparaisse entre t_i et $t_i + dt_i$, $i = 1, \dots, n$ doit être :

$$(1) \quad \left[e^{-\lambda t_1} \lambda dt_1 \right] \left[e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \lambda dt_2 \right] \dots \left[e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \lambda dt_n \right] \left[e^{-\lambda(t - t_n)} \right]$$

puisque aucun évènement ne doit apparaître aux instants ξ dans les intervalles

$$0 \leq \xi < t_1, \quad t_1 < \xi < t_2, \quad \dots, \quad t_n < \xi \leq t$$

alors que l'évènement i doit apparaître entre t_i et $t_i + dt_i$. L'équation (1) peut être condensée en

$$(2) \quad \lambda^n e^{-\lambda t} dt_1 \dots dt_n$$

Maintenant, la probabilité pour que n évènements se présentent dans l'intervalle 0 à t est $p(n; \lambda t)$. Par conséquent, la probabilité conditionnelle pour qu'ils apparaissent comme voulu, lorsque n évènements apparaissent au cours de l'intervalle 0, t est obtenu en divisant (2) par $p(n; \lambda t)$ ce qui donne

$$(3) \quad \frac{n!}{t^n} dt_1 \cdot dt_2 \dots dt_n$$

Remarquons d'après (3) que puisque la densité de probabilité est indépendante de t_i les apparitions des différents événements sont des variables aléatoires indépendantes. De plus la probabilité pour que l'un quelconque de ces événements apparaisse entre t_i et $t_i + dt_i$ est simplement dt_i/t . Pour voir comment $n!$ intervient dans la densité on peut imaginer que l'intervalle de temps entre 0 et t est découpé de façon à former $2n + 1$ boîtes correspondant aux intervalles de temps t_i à $t_i + dt_i$ et les $n + 1$ boîtes restantes correspondant aux $n + 1$ intervalles restants. On peut imaginer que les événements poissonniens sont représentés par des balles qui sont lancées dans les boîtes. Supposons que n balles soient lancées dans les boîtes. Toutes les balles doivent aller dans l'une des boîtes, et pour les boîtes correspondant aux intervalles de temps t_i à $t_i + dt_i$ une seule balle peut loger dans l'une de ces boîtes. La probabilité pour que l'une des balles aille dans la boîte correspondant à l'intervalle t_i à $t_i + dt_i$ est alors $n dt_i/t$. En supposant que l'une des balles aille dans la boîte correspondant à l'intervalle t_1 à $t_1 + dt_1$, la probabilité pour que l'une des $n - 1$ balles restantes aille dans la boîte correspondant à l'intervalle t_2 à $t_2 + dt_2$ est $(n-1) dt_2/t$, etc. Par conséquent, la probabilité pour que l'une des balles aille dans chacune des boîtes correspondant aux intervalles t_i à $t_i + dt_i$ est donnée par (3). Nous venons de montrer que si nous savons qu'au moins un événement poissonnien apparaît dans l'intervalle 0 à t , alors la probabilité pour que n'importe quel autre apparaisse entre ξ et $\xi + d\xi$ est $d\xi/t$, et ce résultat est indépendant du nombre d'événements réalisés dans l'intervalle ou de leur instant d'apparition.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que les probabilités d'état sont indépendantes de la distribution du délai de livraison. La probabilité pour qu'une unité commandée à l'instant t_i soit livrée au temps $t > t_i$ est

$$(4) \quad S(t-t_i) = \int_0^{t-t_i} g(\tau) d\tau$$

Si nous savons alors qu'au moins une demande s'est présentée entre les instants 0 et t, la probabilité pour qu'une demande quelconque se soit présentée entre t_i et $t_i + dt_i$ et que l'unité commandée soit livrée au temps t est

$$\frac{S(t - t_i)}{t} dt_i$$

Par conséquent, la probabilité pour qu'une commande passée entre 0 et t soit livrée à l'instant t est :

$$(5) \quad \frac{1}{t} \int_0^t S(t - t_i) dt_i = \frac{1}{t} \int_0^t S(\xi) d\xi$$

Supposons maintenant que le système ait fonctionné pendant une durée t. Nous supposons que R unités étaient initialement disponibles. Calculons la probabilité pour que le stock net soit x à l'instant t s'il s'est présenté n demandes en tout depuis le début du fonctionnement du système. Si le stock net est x, c'est que $n + x - R$ commandes ont été livrées alors que $R - x$ ne l'ont pas encore été. La probabilité de cet événement que nous noterons $q(x; n, t)$ est tout simplement la probabilité binomiale de $n + x - R$ succès au cours de n essais, la probabilité d'un succès étant donnée par (5) c'est-à-dire :

$$(6) \quad q(x; n, t) = \binom{R-x}{n} \left[\frac{1}{t} \int_0^t S(\xi) d\xi \right]^{n+x-R} \left[\frac{1}{t} \int_0^t [1-S(\xi)] d\xi \right]^{R-x}$$

En pondérant $q(x; n, t)$ par la probabilité pour que n unités soient demandées, nous trouvons que la probabilité $W_x(t)$ pour que le stock net ait un niveau x à l'instant t est donnée par

$$W_x(t) = \sum_{n=R-x}^{\infty} p(n; \lambda t) q(x; n, t)$$

$$(7) \quad W_x(t) = \frac{\{\lambda \int_0^t [1-S(\xi)] d\xi\}^{R-x}}{(R-x)!} e^{-\lambda \int_0^t [1-S(\xi)] d\xi}$$

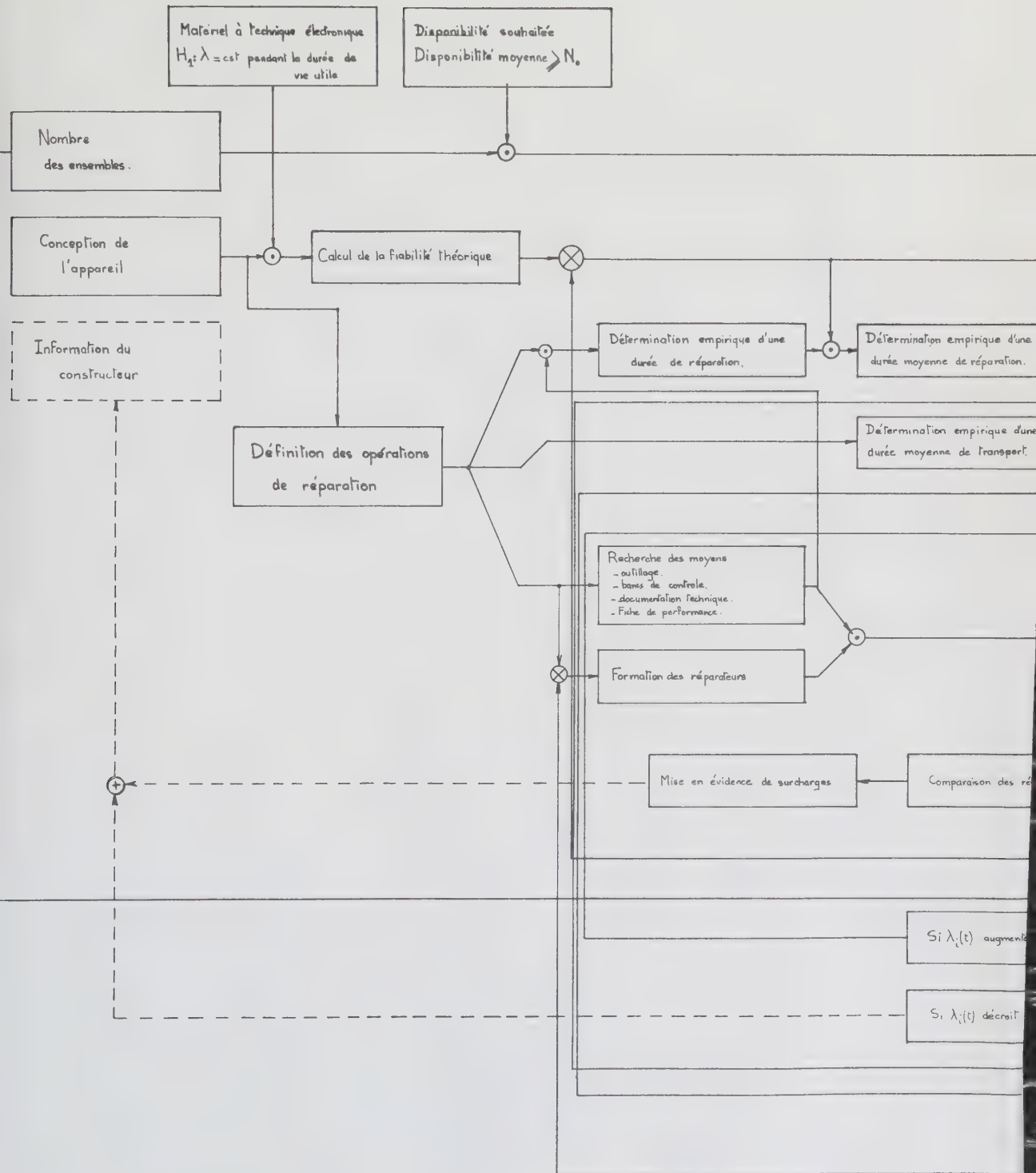
Pour déterminer $\lim_{t \rightarrow \infty} W_x(t)$ remarquons que :

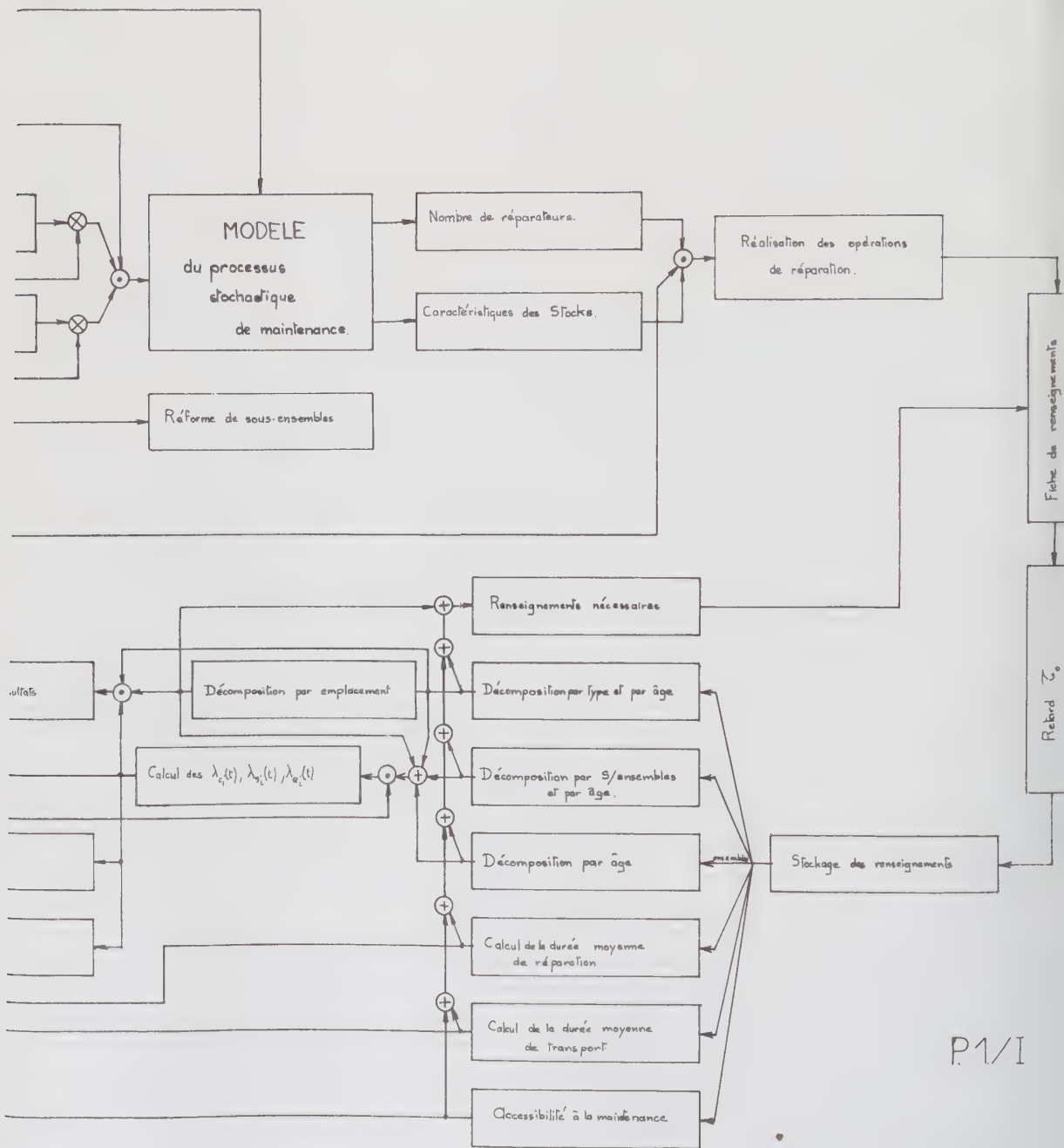
$$(8) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t [1-S(\xi)] d\xi &= \int_0^\infty [1-S(\xi)] d\xi = \int_0^\infty -\xi [1-S(\xi)] \\ &= \int_0^\infty \xi \frac{dS}{d\xi} d\xi = \int_0^\infty \xi g(\xi) d\xi = \bar{\xi} \end{aligned}$$

ce qui entraîne, dans (7) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_x(t) = p(R-x ; \bar{\lambda \tau})$$

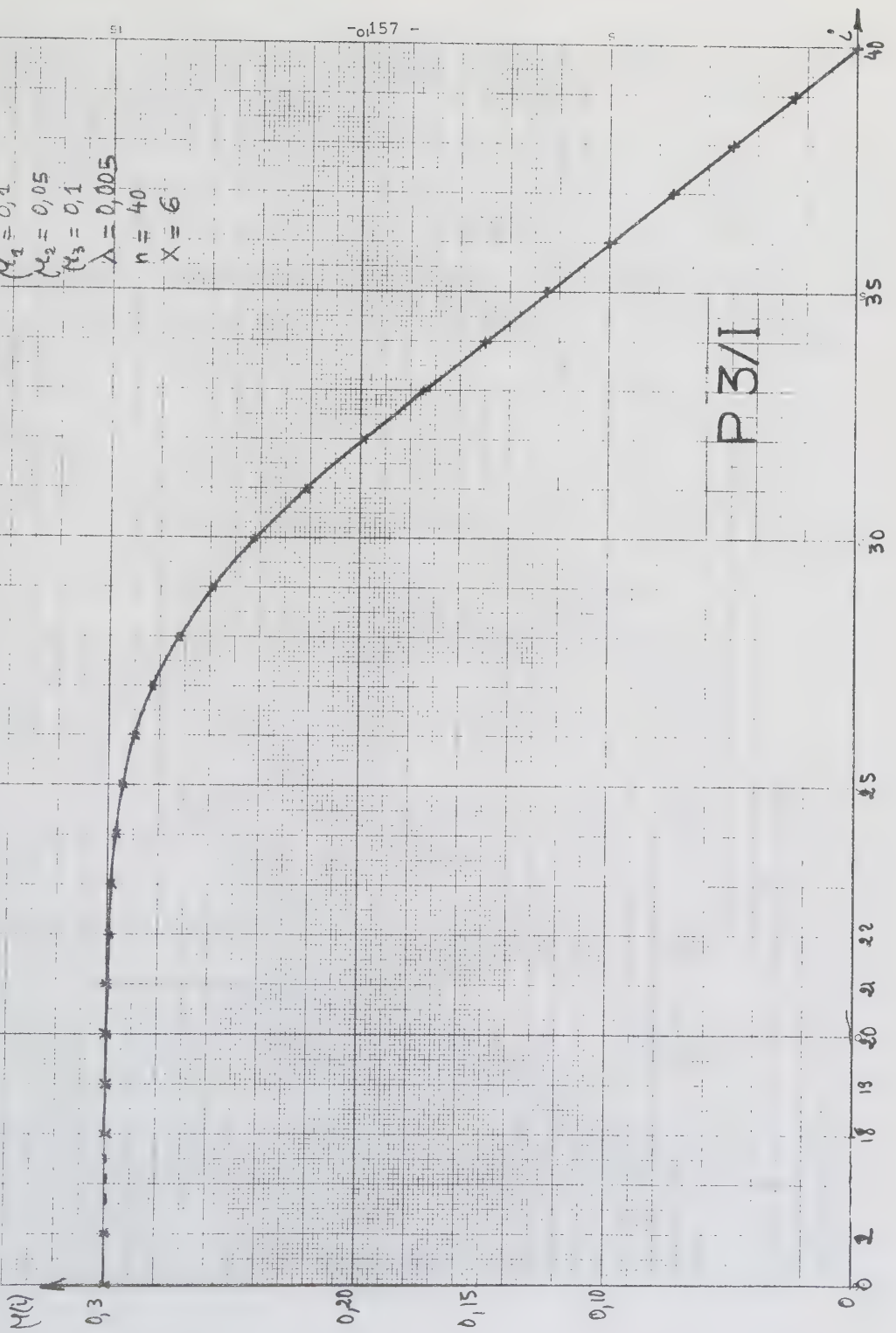
c'est-à-dire que les limites des probabilités d'état sont poissonniennes et qu'elles ne dépendent que du délai de réapprovisionnement moyen $\bar{\tau}$...





REPRESENTATION DES TAUX DE TRANSITION $\gamma(i)$ DANS LE CAS D'UN ATELIER

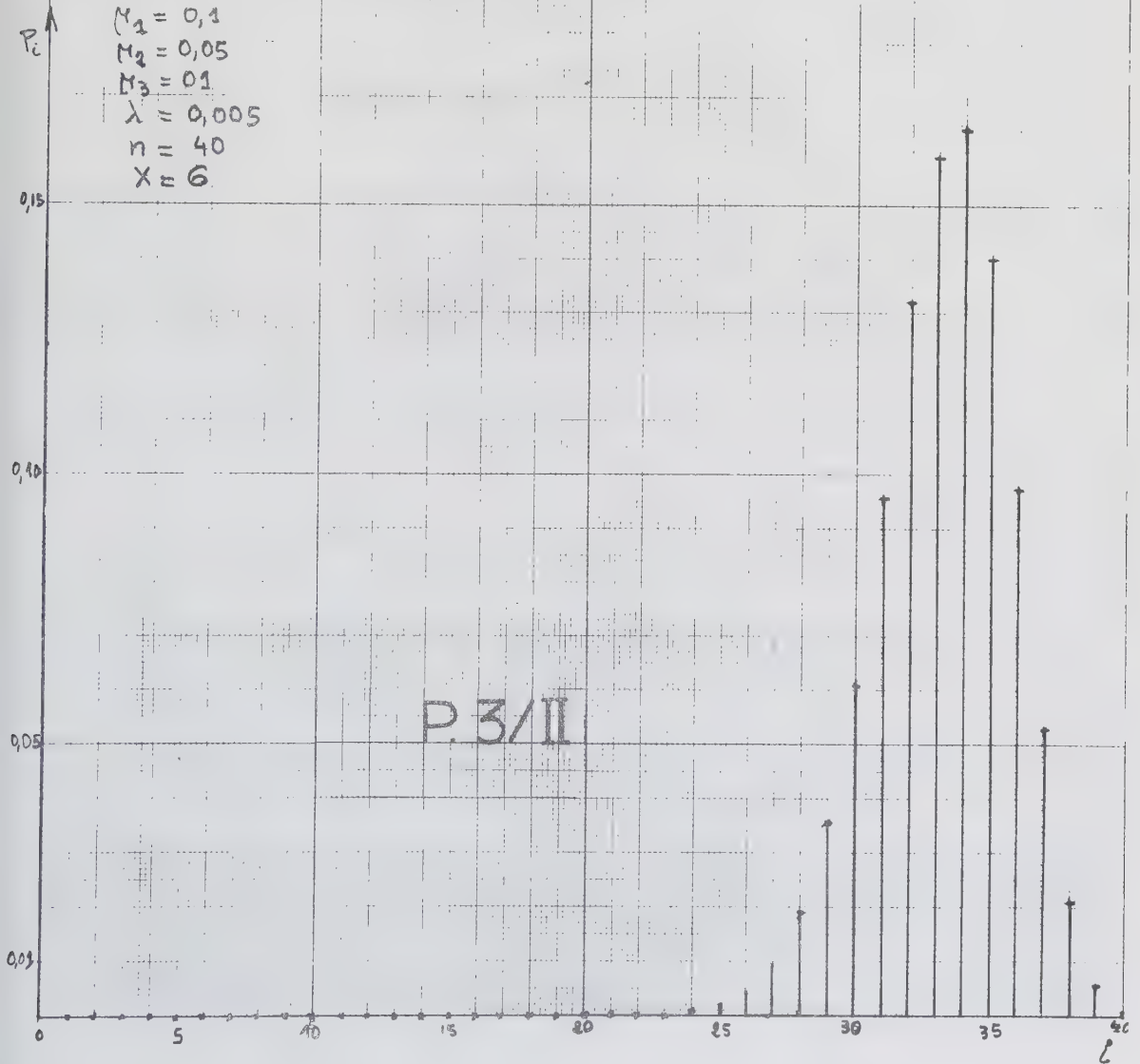
$\mu_1 = 0,1$
 $\mu_2 = 0,05$
 $\mu_3 = 0,1$
 $\lambda = 0,005$
 $n = 40$
 $X = 6$



P 3/I

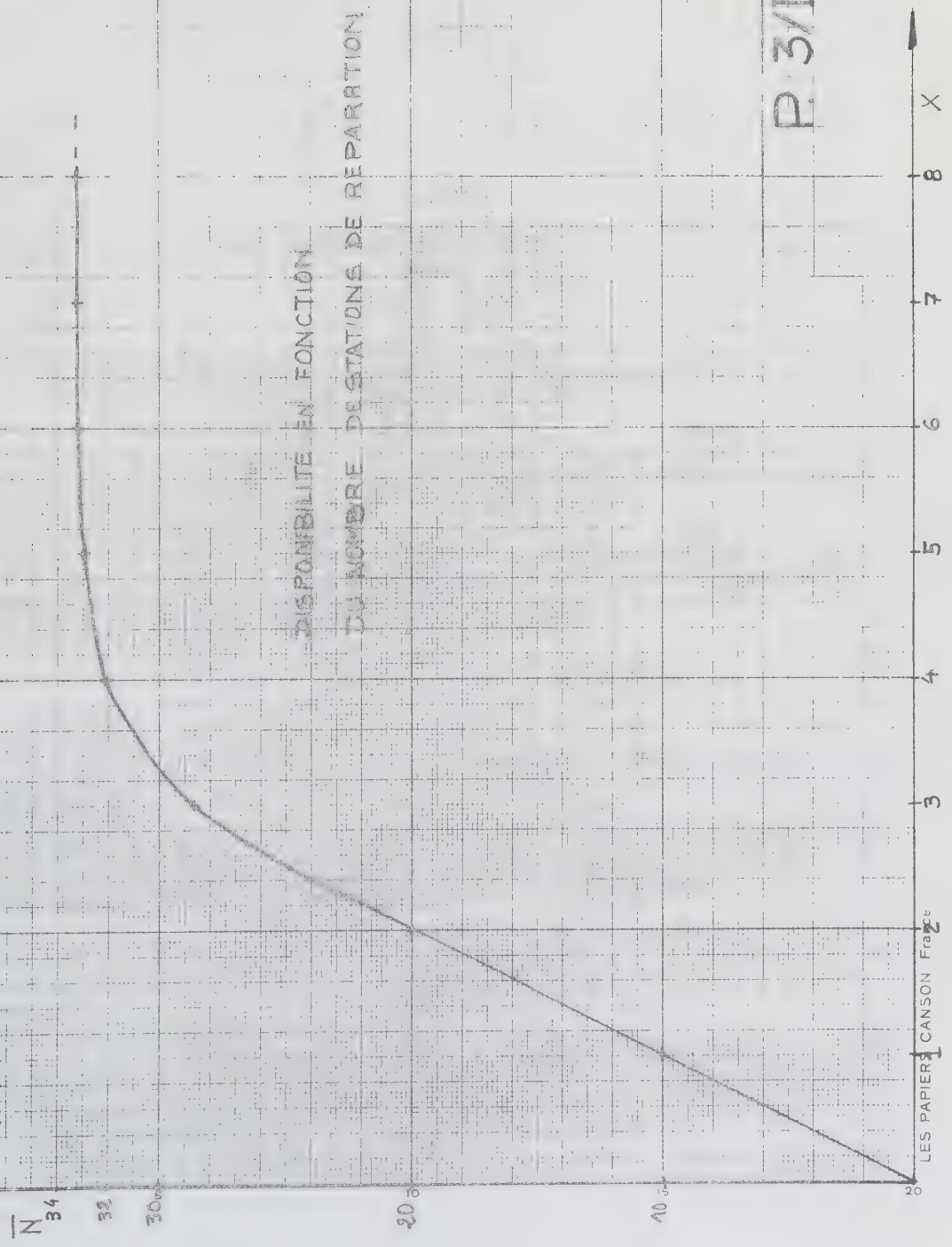
REPRESENTATION DES PROBABILITES D'ETATS P_L DANS LE CAS
D'UN ATELIER

$M_1 = 0,1$
 $M_2 = 0,05$
 $M_3 = 0,1$
 $\lambda = 0,005$
 $n = 40$
 $X = 6$



DISPONIBILITE EN FONCTION
DU NOMBRE DE STATIONS DE REPARATION

P. 3/III



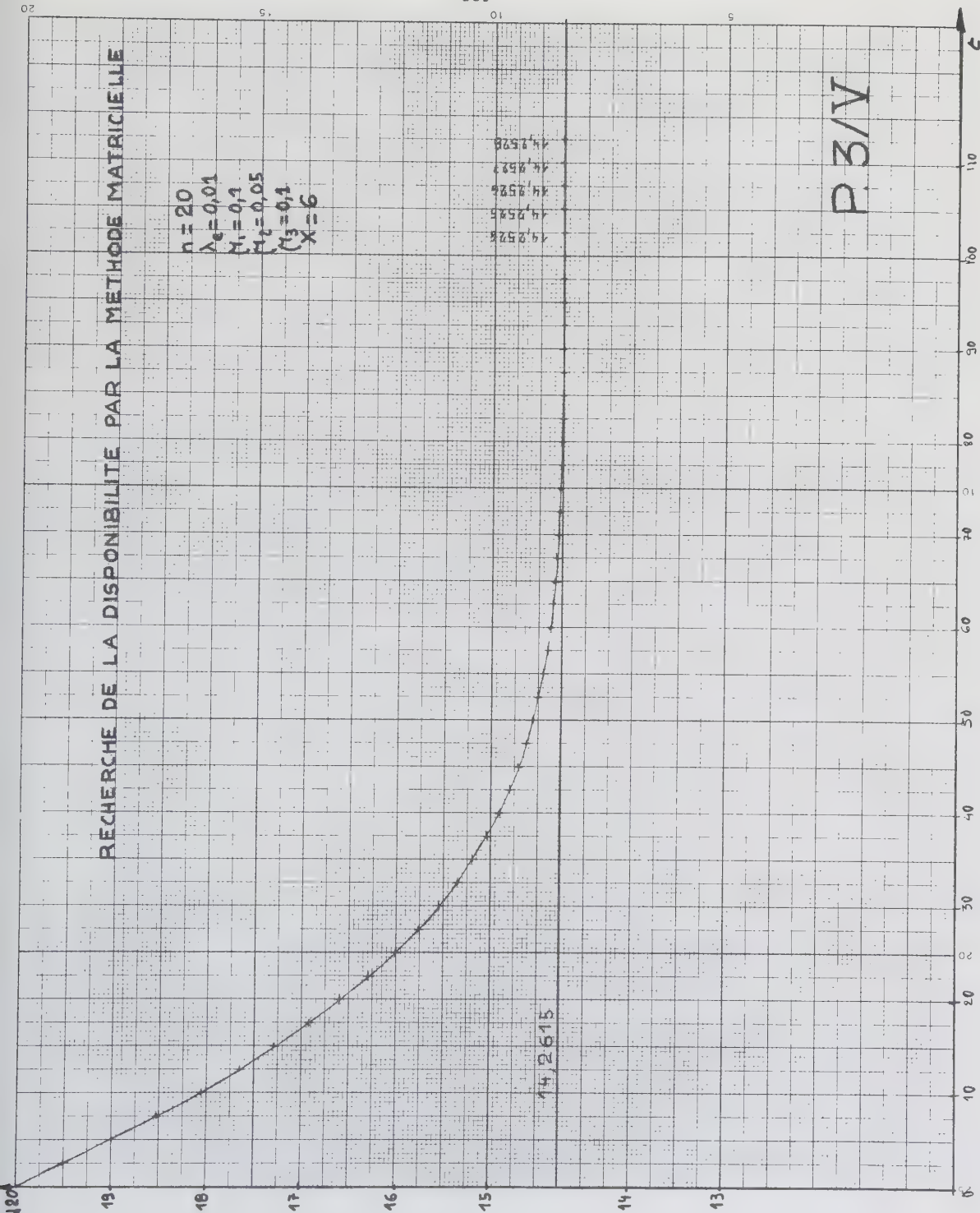
RECHERCHE DE LA DISPONIBILITE PAR LA METHODE MATRICIELLE

$n = 20$
 $\lambda_c = 0,01$
 $\lambda_1 = 0,1$
 $\lambda_2 = 0,05$
 $\lambda_3 = 0,1$
 $X = 6$

$14,2528$
 $14,2528$
 $14,2528$
 $14,2528$
 $14,2528$

14,2615

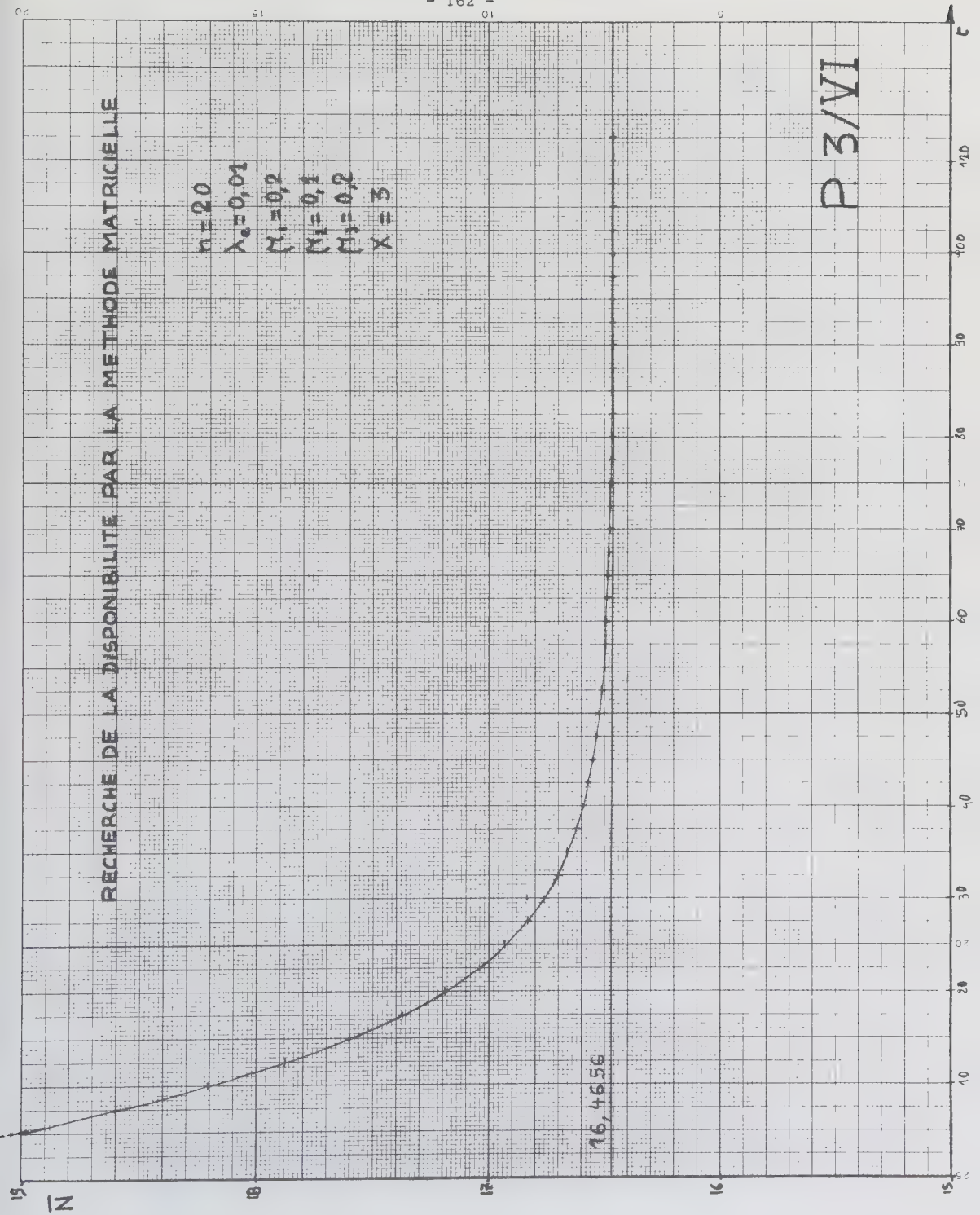
P3/V

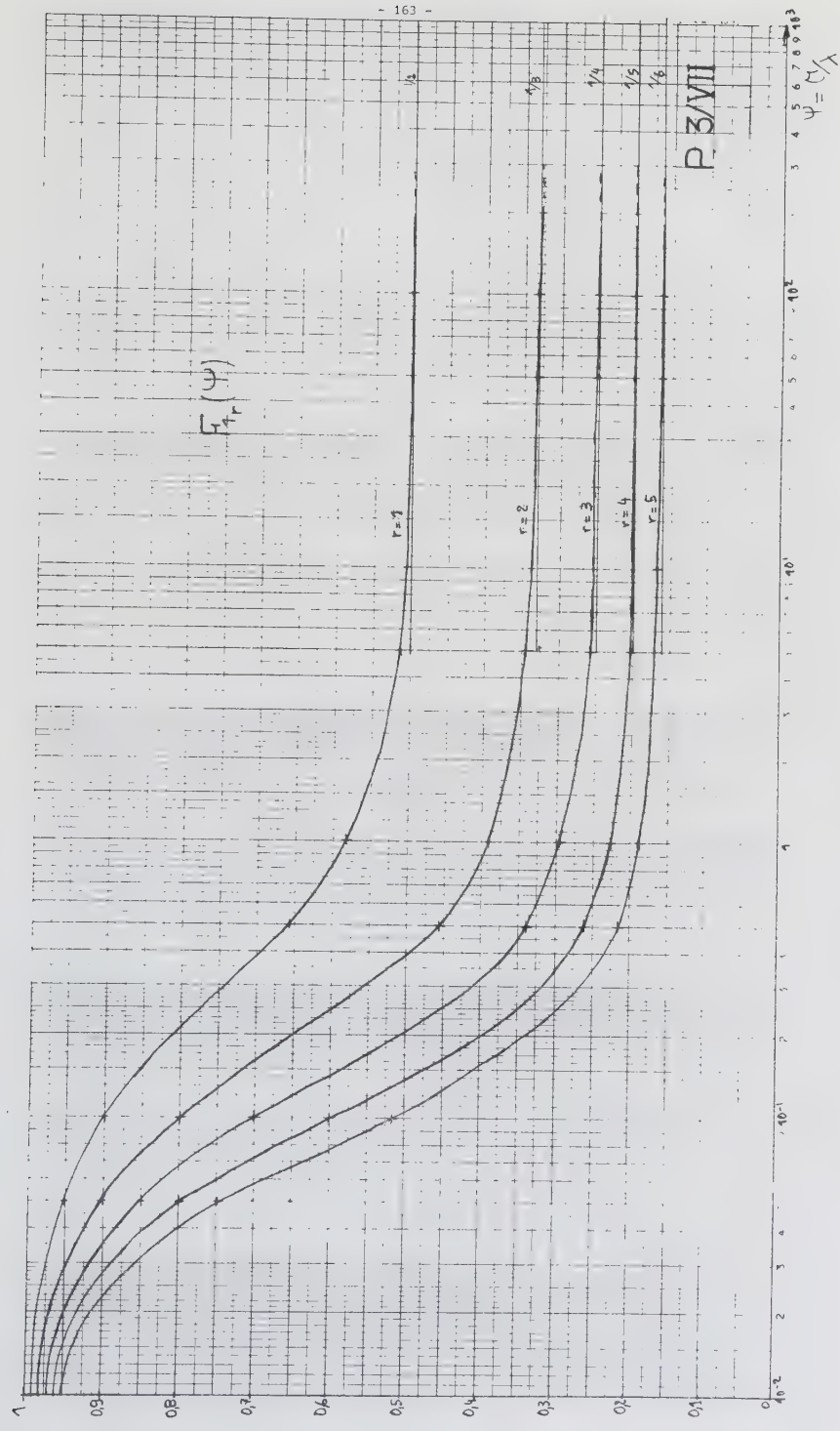


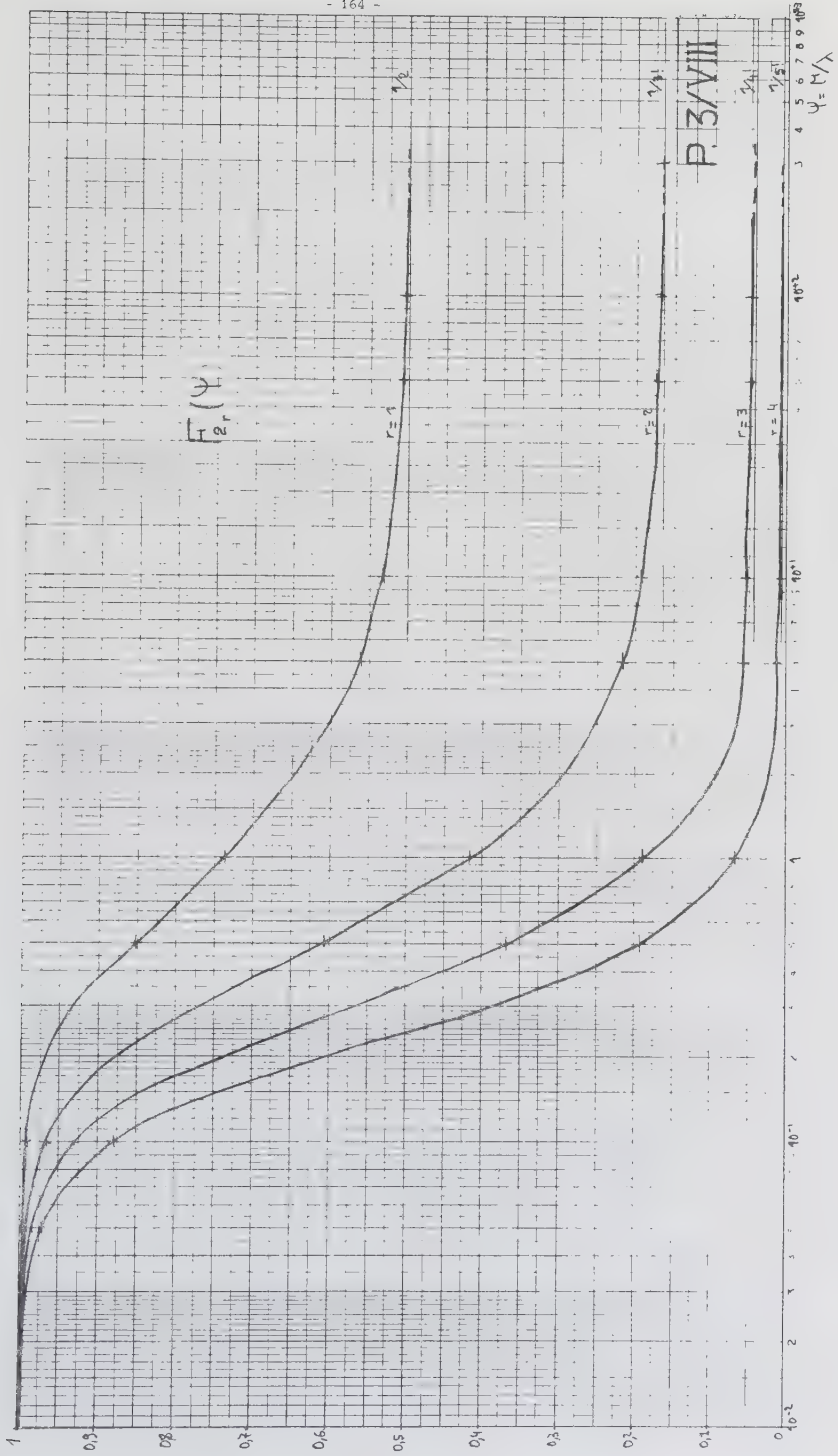
RECHERCHE DE LA DISPONIBILITE PAR LA METHODE MATRICIELLE

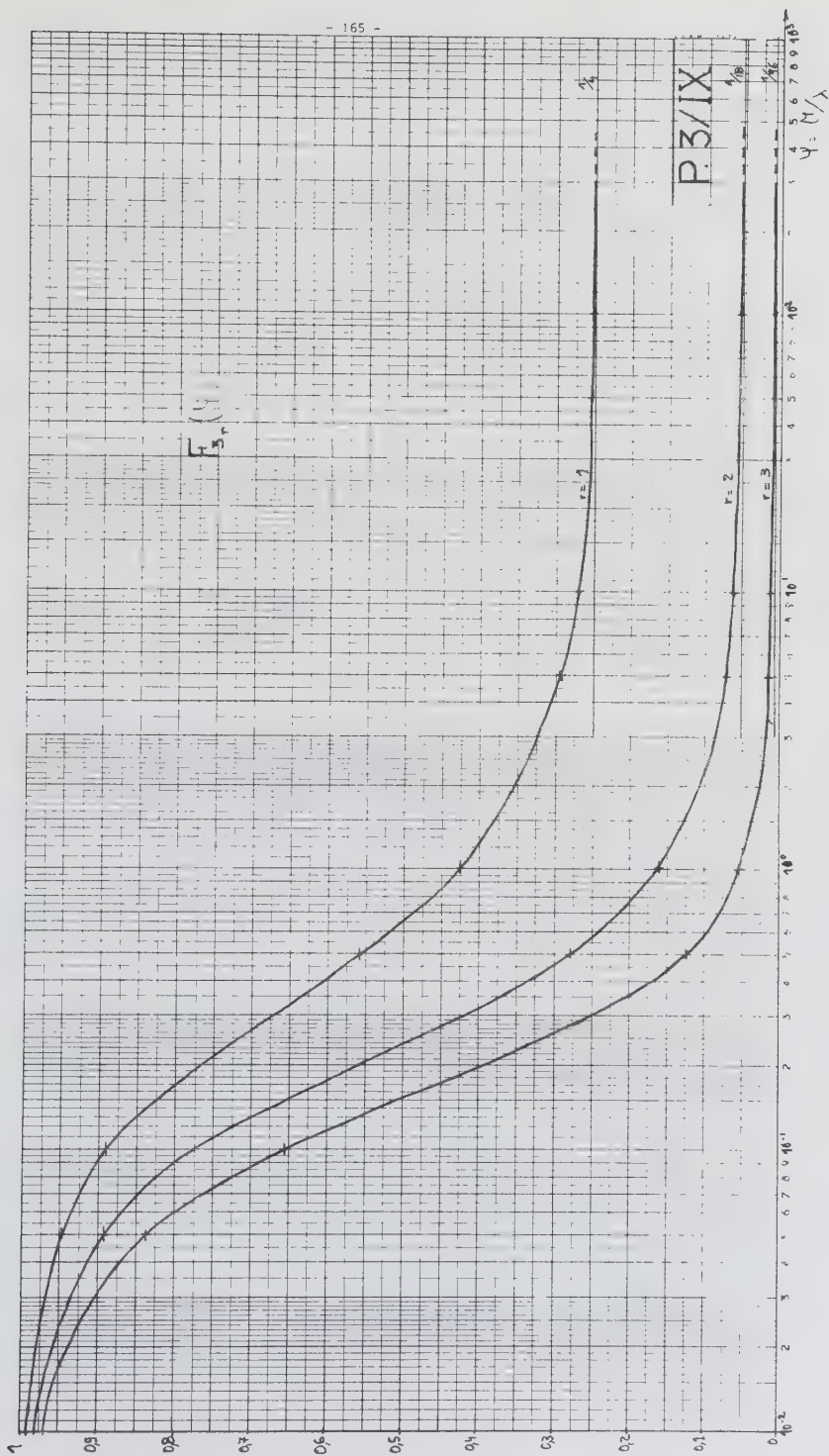
$n=20$
 $\lambda_0=0,01$
 $\lambda_1=0,2$
 $\lambda_2=0,1$
 $\lambda_3=0,2$
 $X=3$

P 3/VI







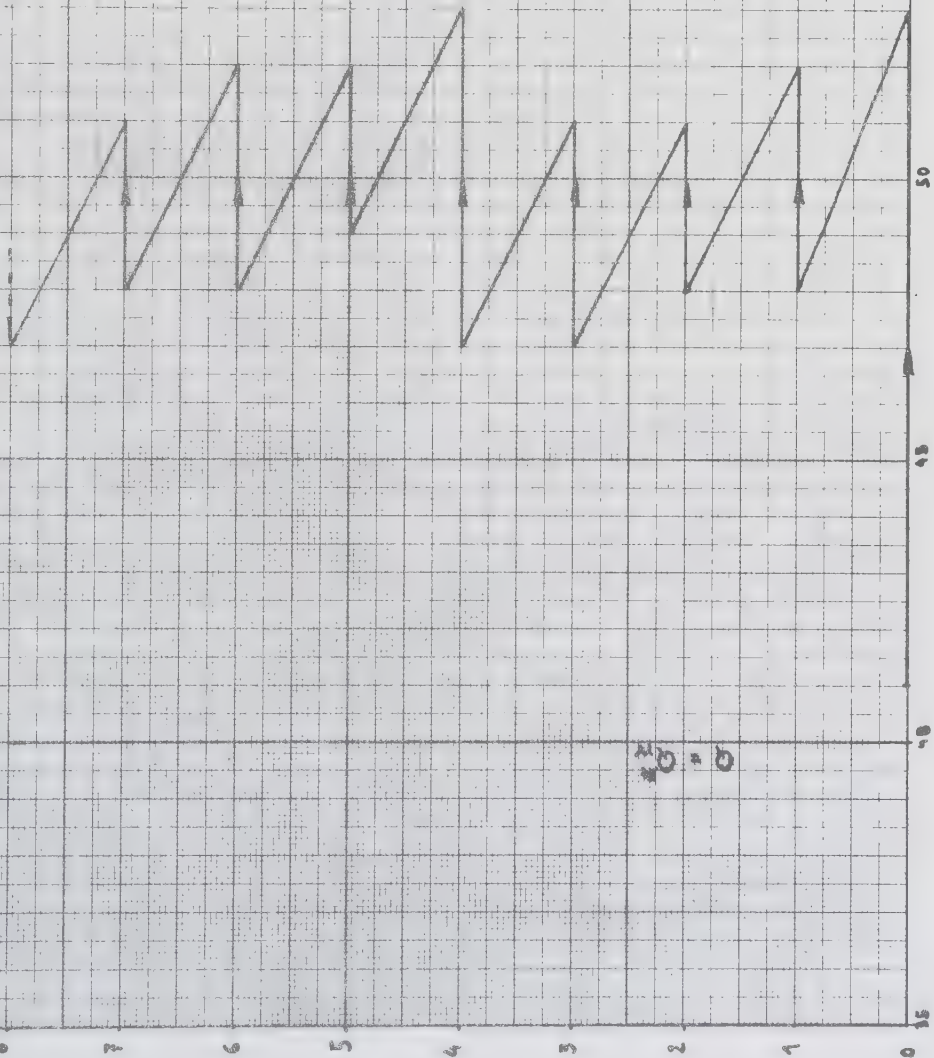


Chemin optimal

avec:

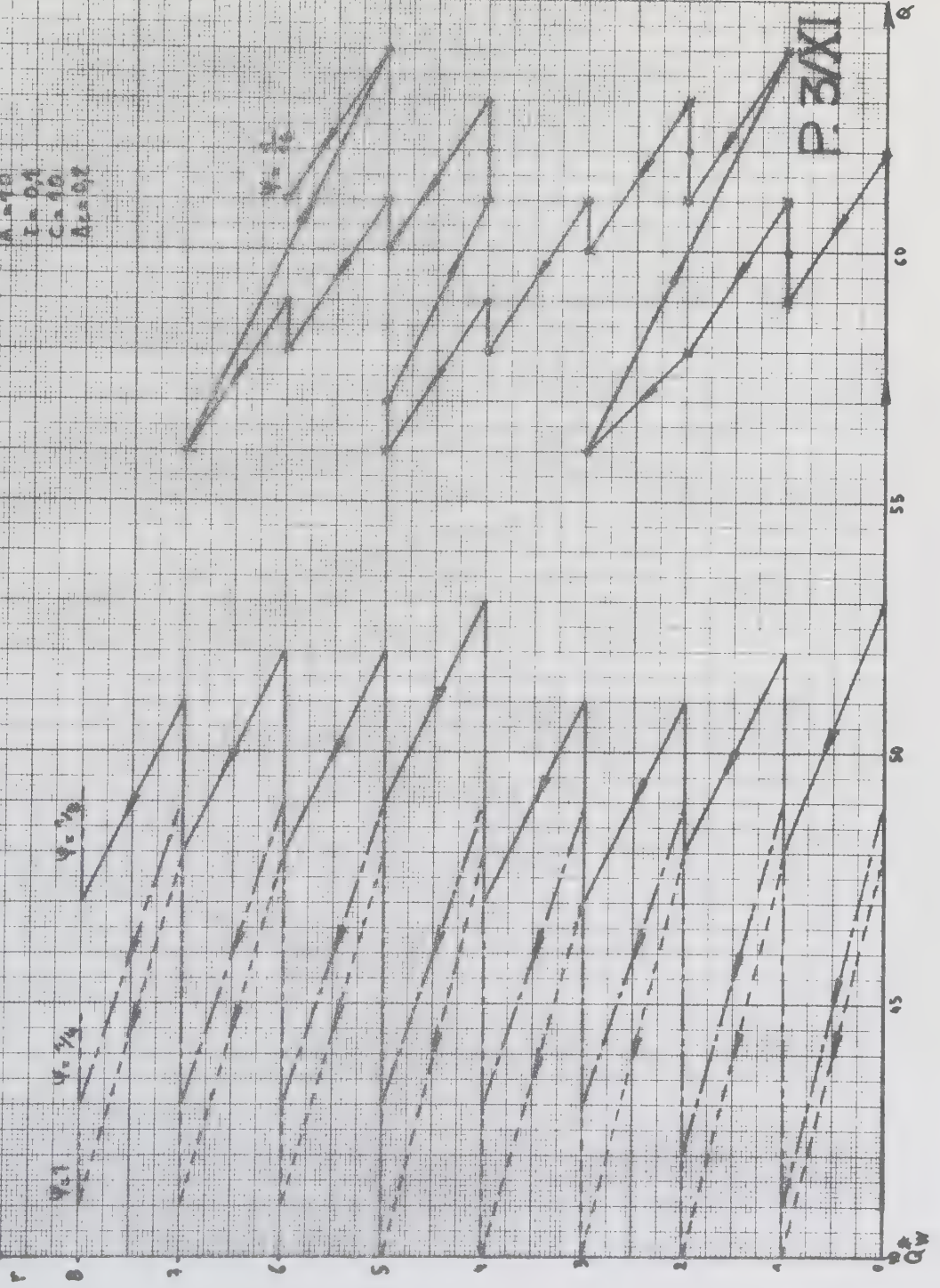
$\lambda = 90$
 $A = 10$
 $I = 0,1$
 $C = 10$
 $M = 10$
 $(\alpha = 0,2)$

P.3/X

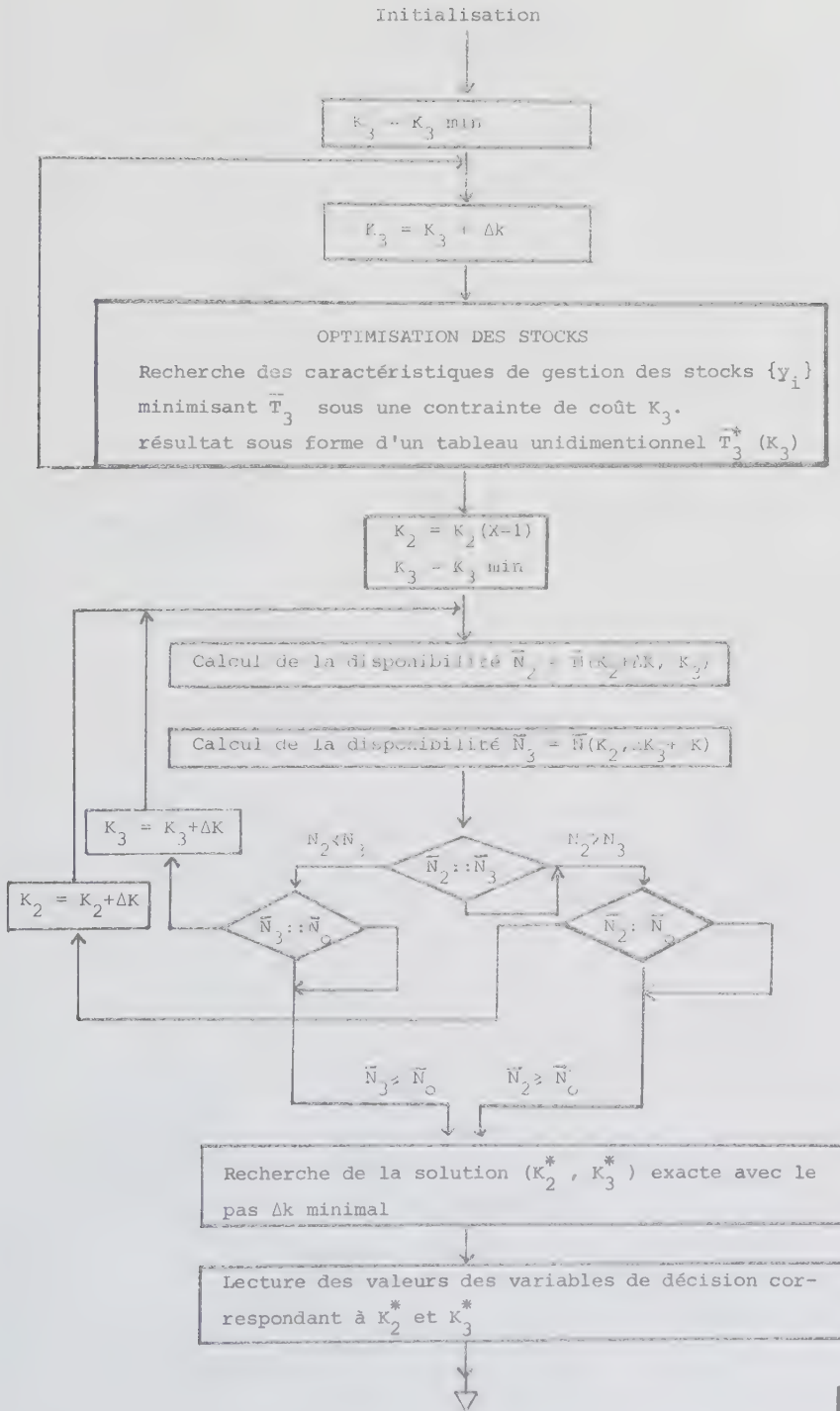


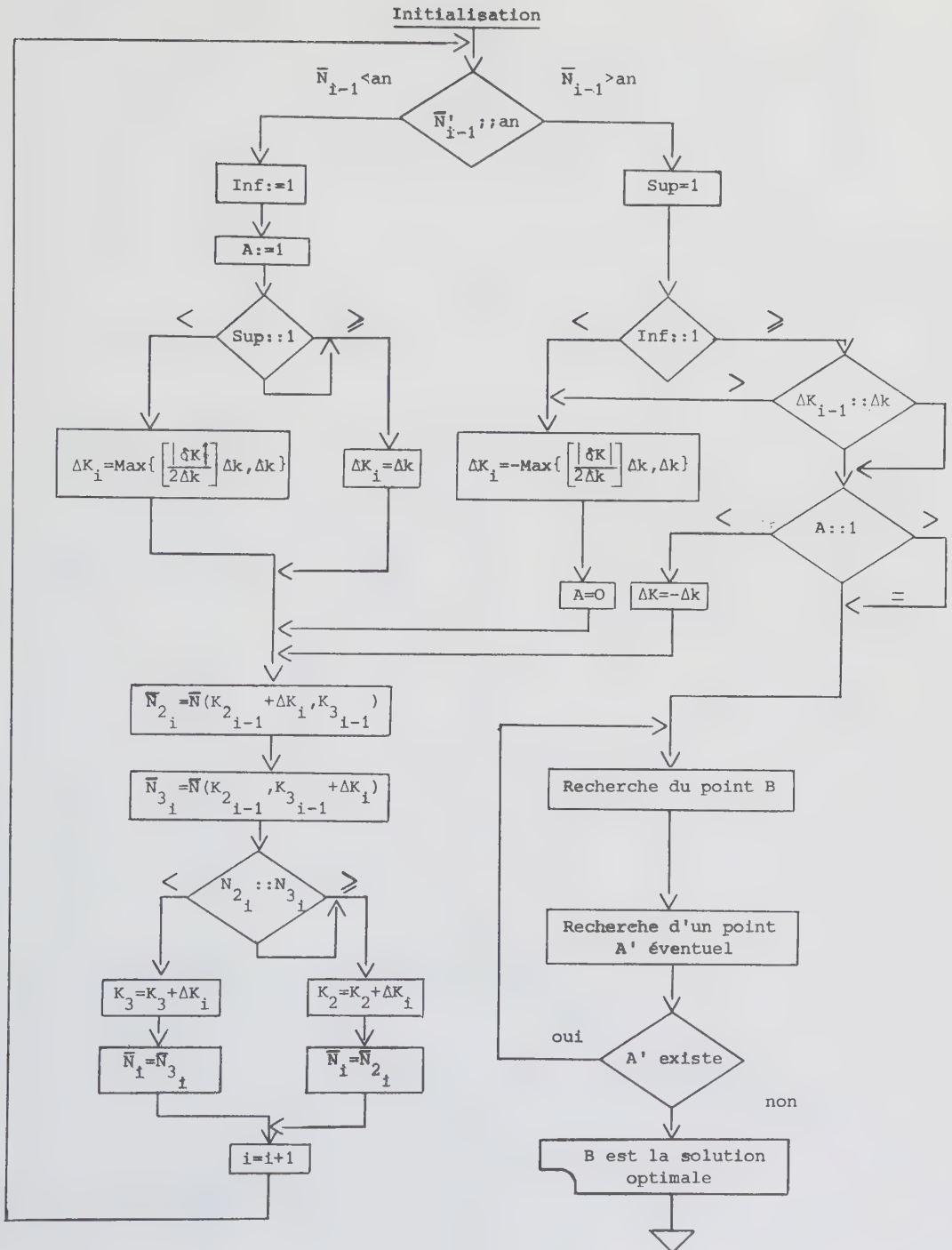
Influence de Ψ sur le chemin optimal

$\lambda = 80$
 $A = 10$
 $I = 0.4$
 $C = 10$
 $A_2 = 0.2$



P.3/XI





$\lambda(t)$

TAUX DE MORTALITÉ POUR UN MATÉRIEL NON ÉLECTRONIQUE

$Q'(t)$

$F(t)$

P. 3/XIV

- 170 -

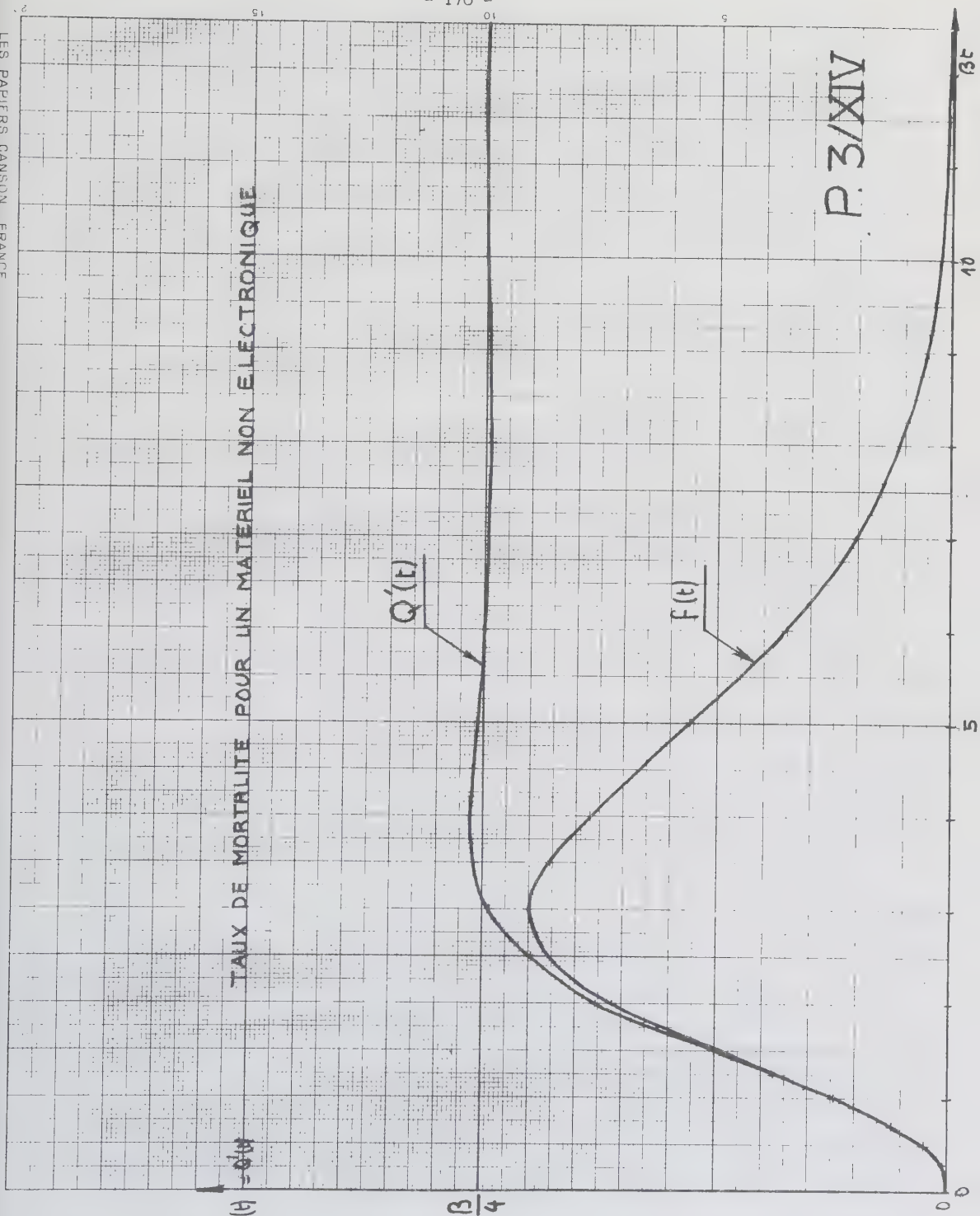
$\frac{\beta}{4}$

0

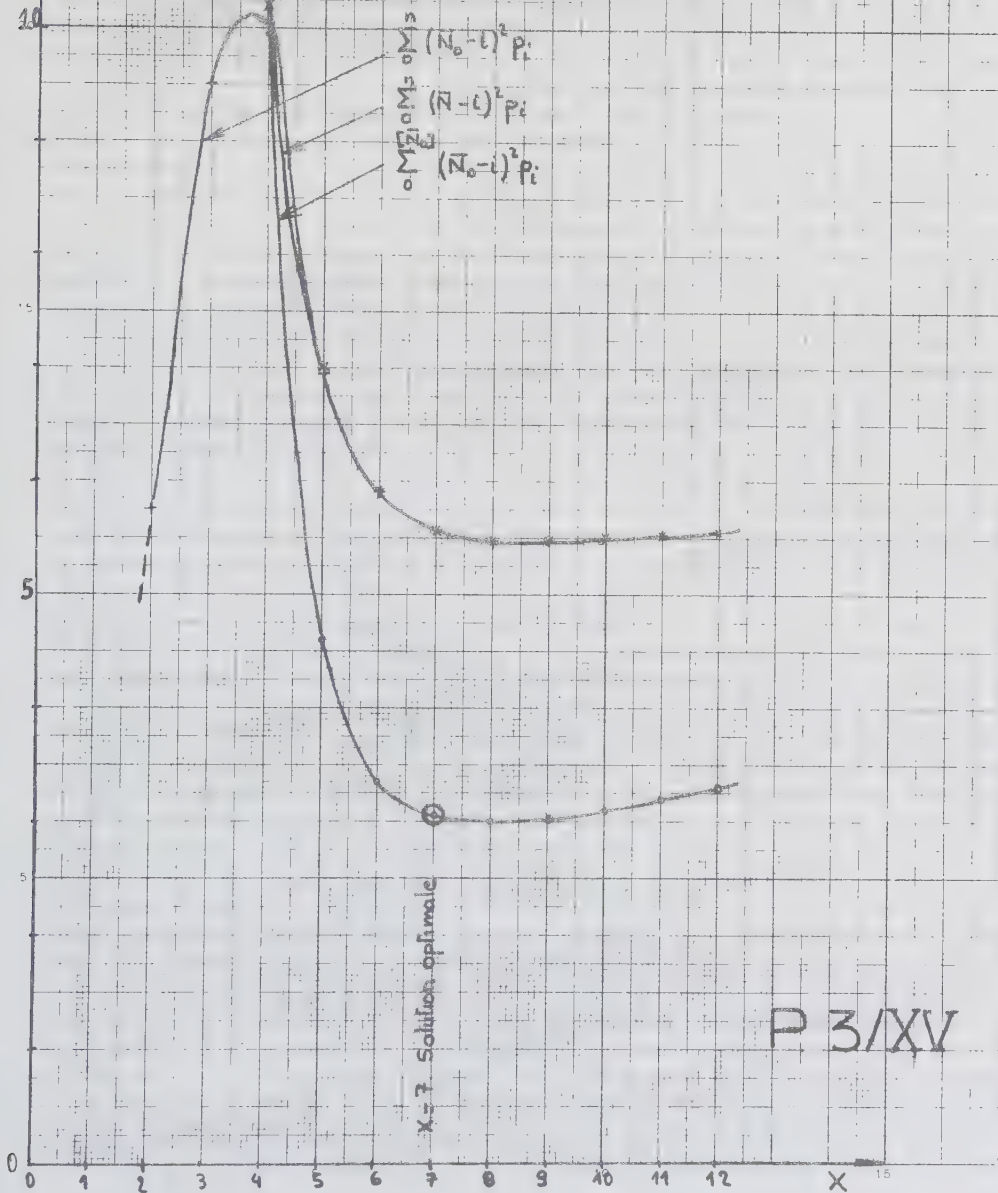
5

10

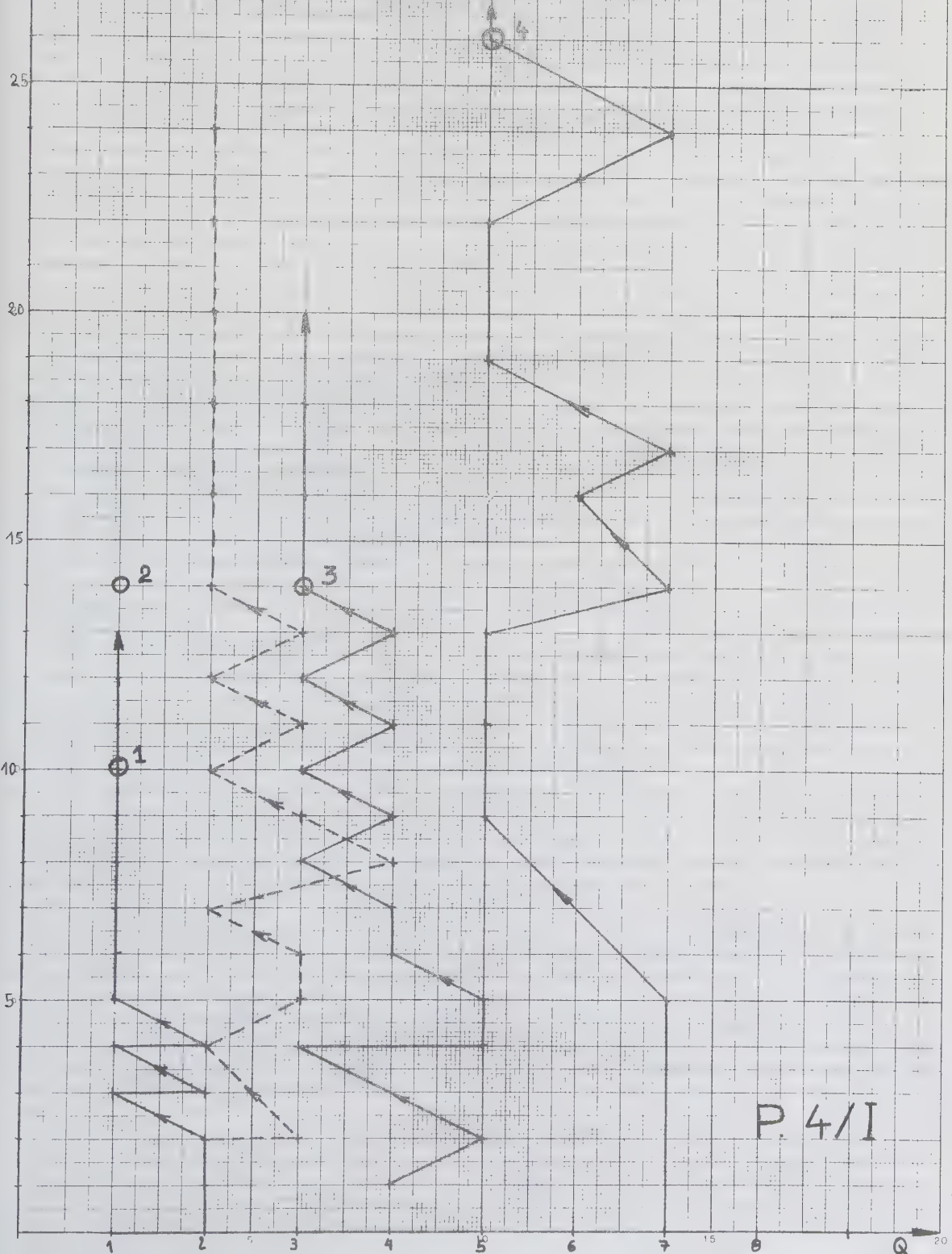
15



DISPERSION DES PROBABILITES D'ETAT DU PARC



POLITIQUE DES STOCKS



P. 4/I

$x(k_2)$

P 4/II

POLITIQUE GLOBALE

130000

OPTIMISATION
FINE

k_3

151

191

76

15

1

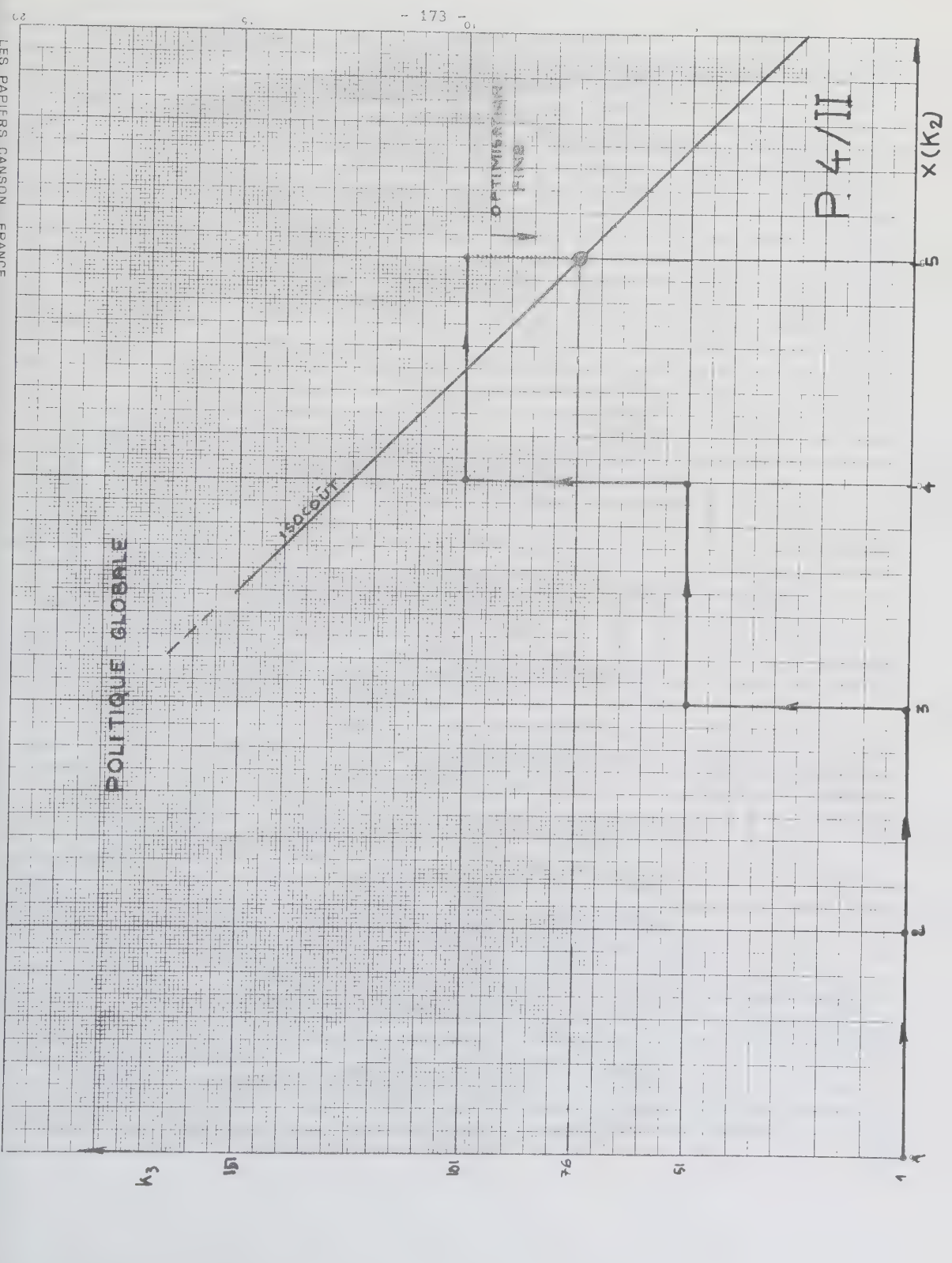
5

4

3

2

1

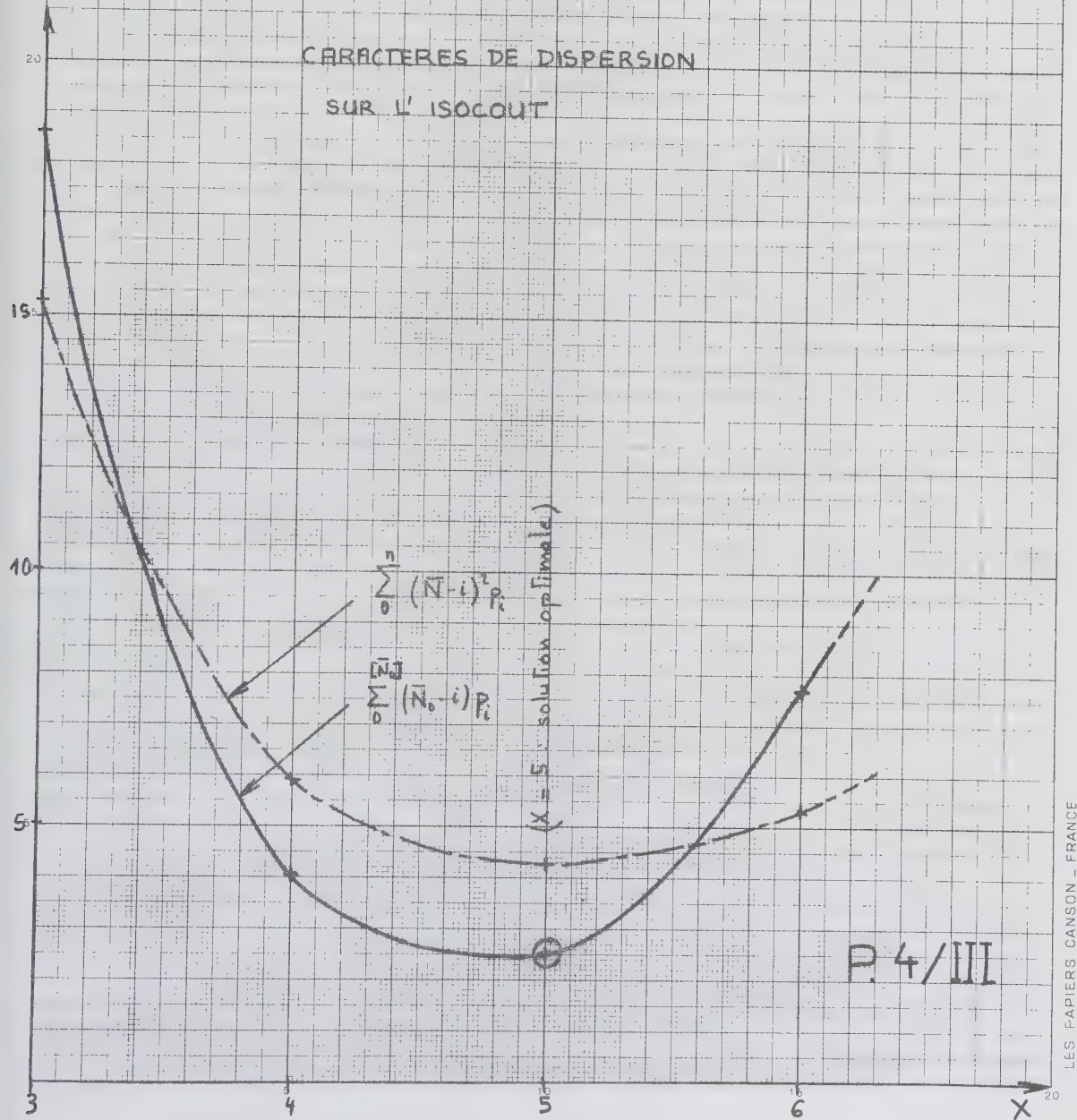


173

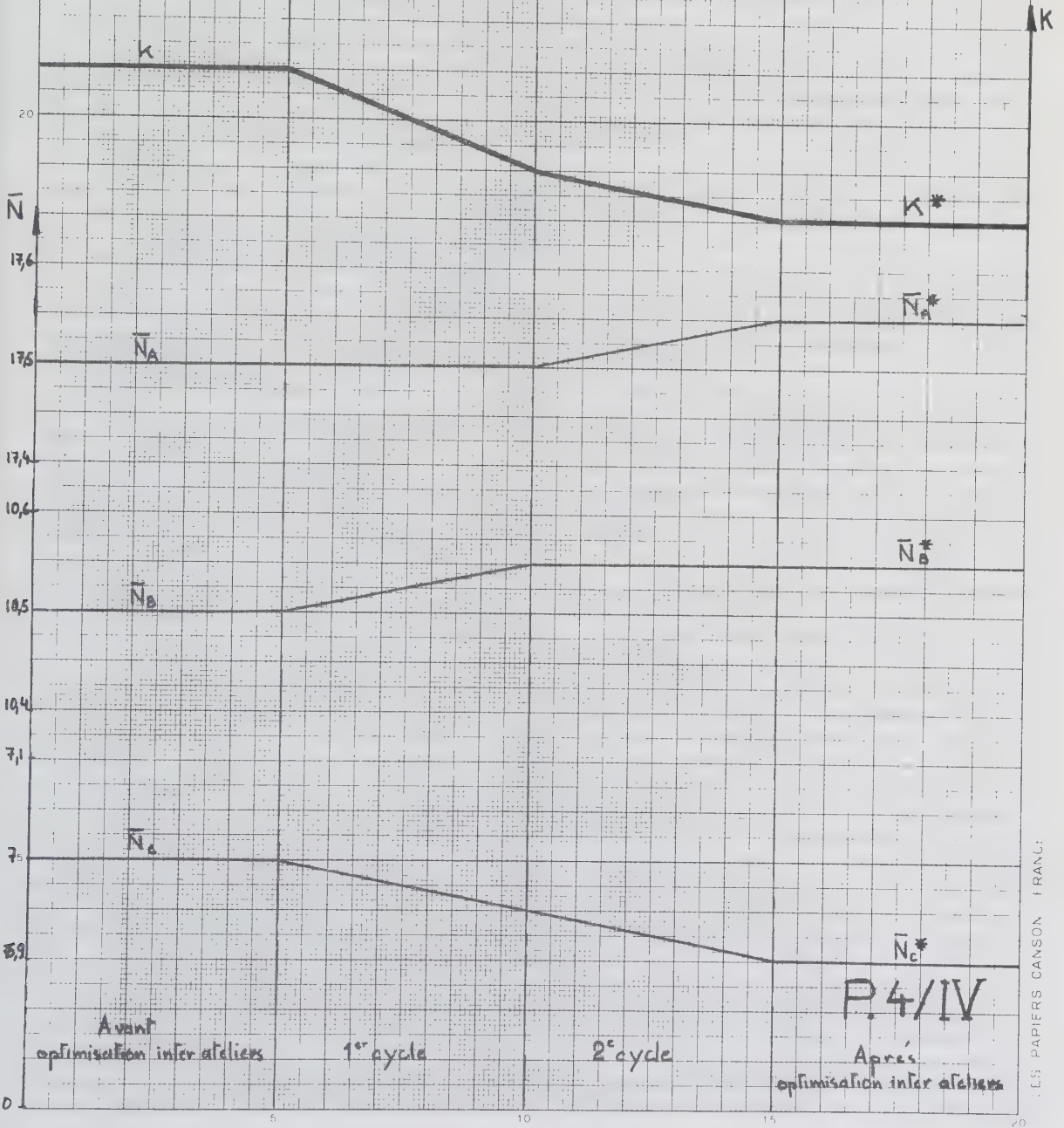
5

2

CARACTERES DE DISPERSION SUR L' ISOCOÛT

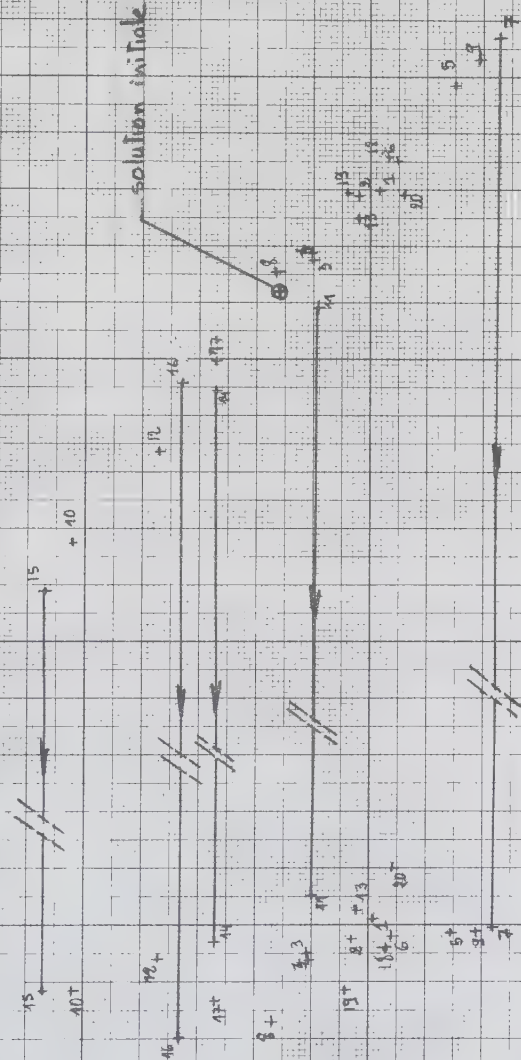


MAINTENANCE A PLUSIEURS ATELIERS

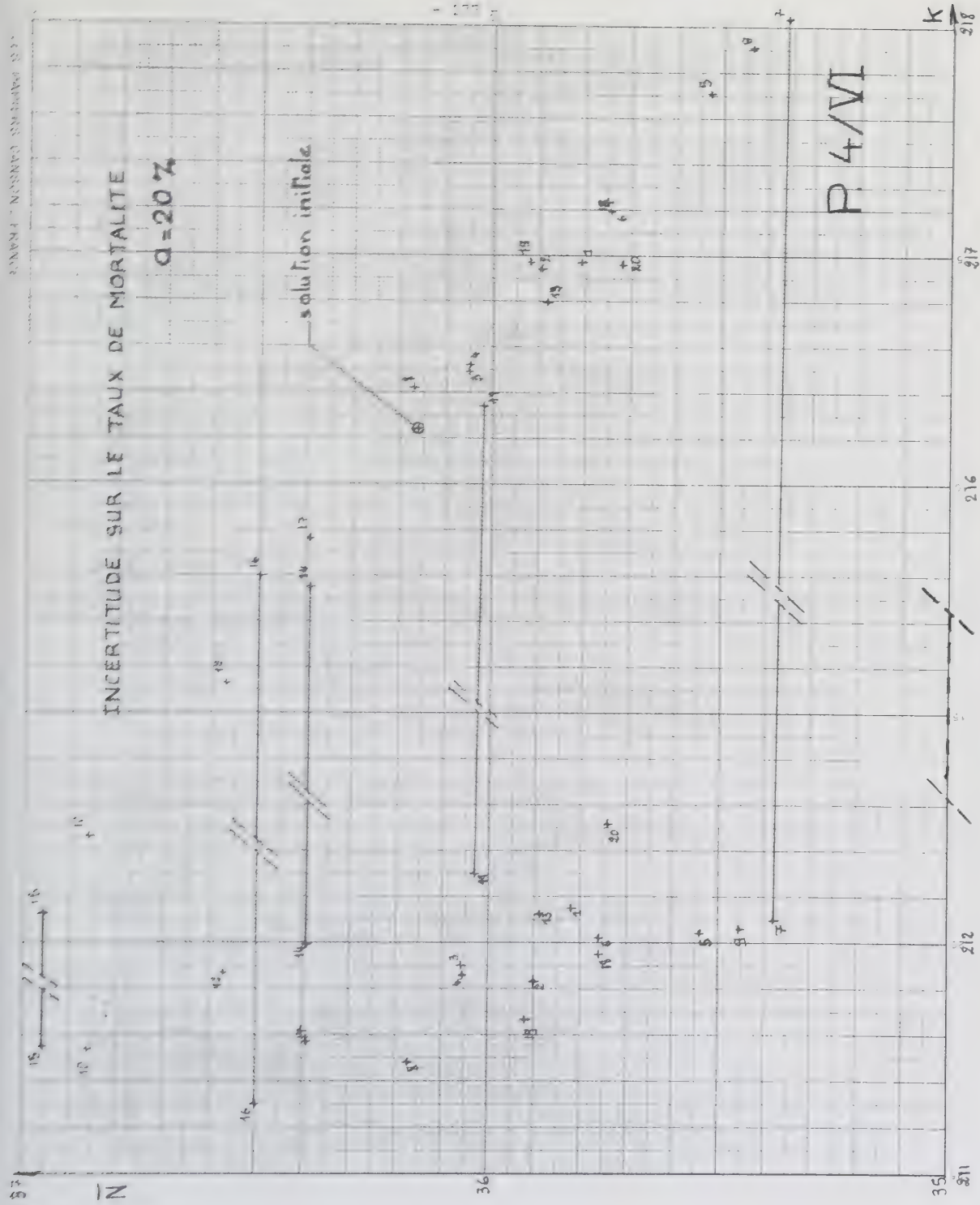


INCERTITUDE SUR LE TAUX DE MORTALITE

$Q = 10\%$

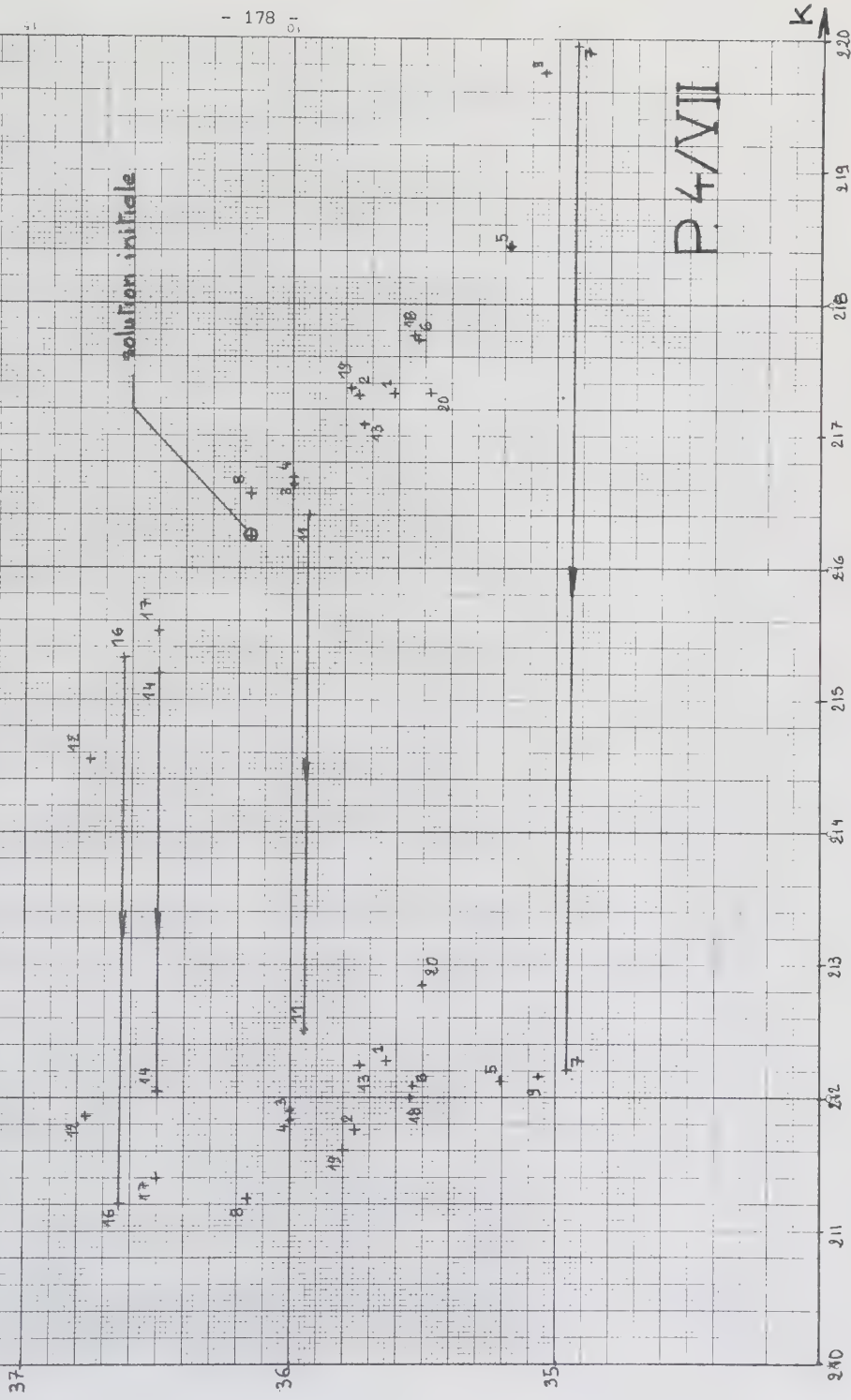


P4/V



INCERTITUDE SUR LE TAUX DE MORTALITE

$\sigma = 30\%$



P4/VII

-- BIBLIOGRAPHIE --

- [1] "Traité de Statistique théorique et appliquée" - DUGUE - MASSON 1958
- [2] "Statistiques" - C.FOURGEAUD et A. FUCHS - DUNOD 1967
- [3] "Méthodes statistiques de l'ingénieur" -A.M.BOWKER et G.J.LIEBERMAN
- [4] "Traité de fiabilité" - M.SCHWOB et G.PEYRACHE - MASSON & Cie 1969
- [5] "La vie des équipements" - J.M.DETHOOR et J.L.GROBOILLOT - DUNOD 1968
- [6] "Durée de vie, Fiabilité, Disponibilité des matériels" - R.LANGLOIS-BERTHELOT - DUNOD 1968
- [7] "Fiabilité et statistiques prévisionnelles - Méthode de Weibull" - A.POLLARD et C.RIVOIRE - EYROLLES 1971
- [8] "R.A.D.C. Reliability Notebook" U.S. Department of Commerce - Office of Technical Services - Washington 25, D.C. 1968
- [9] Rapport C.I.R.O. : FIF/2-12-67 : "Description et critiques de la méthode R.A.D.C. de prévision de fiabilité"
- [10] "Maintenability prediction" - MIL-HDBK-472.U.S. Department of Defense mai 1966
- [11] "Les phénomènes d'attente" - A.KAUFMANN et R.GRUON - DUNOD 1960
- [12] "Files d'attentes, stocks et entretien" traduit de P.M.MORSE - DUNOD 1960
- [13] "Les systèmes avec ou sans attente et les processus stochastiques" P.LE GALL - DUNOD 1962
- [14] "Queuing" dans "Notes on Operations Research" de P.GALLIHER. M.I.T. 1959
- [15] "A first course in stochastic processes" - S.KARLING - Academic press 1966
- [16] "Markov Chains With Stationary Transition Probabilities" - KAT LAT CHUNG - SPRINGER-VERLAG 1967

- [17] "Etude et pratique des Modèles de stocks" traduit de G.HADLEY et
T.M. WHITIN - DUNOD 1966
- [18] "La programmation dynamique et ses applications" traduit de R.E.BELLMAN
et S.E.DREYFUS - DUNOD 1965
- [19] "Dynamic Programming of Economic Decisions" -BECKMANN - SPRINGER-VERLAG
1968
- [20] "Dynamic Programming and Markov Processes" - HOWARD - The M.I.T. Press
1969
- [21] "Optimal Replacement Policy" D.W.JORGENSON, J.J.Mc CAL, R.RADNER -
North-Holland Publishing Company - Amsterdam 1967
- [22] "Maintenance des équipements - Détermination d'une politique optimale
de remplacement" - G.CILIGOT-TRAVAIN et M.GOURSAT - IRIA 1972

SOMMAIRE

I - INTRODUCTION

I-1 : De quoi s'agit-il ?	1
I-2 : Présentation de l'étude	2
I-3 : Description du système général	4
I.3.1 : Utilisation de la fiabilité théorique	4
I.3.2 : Recherche de la fiabilité réelle	5

II - GENERALITES

II-1 : Fiabilité	7
II.1.1 : Généralités	7
II.1.1.1 : Introduction	7
II.1.1.2 : Lois mathématiques	8
II.1.1.3 : Fiabilité des systèmes	10
II.1.2 : Etude des taux théoriques de défaillance	11
II.1.3 : Intérêts des tests de fiabilité	11
II-2 : Maintenabilité	14
II.2.1 : Lois mathématiques	15
II.2.2 : Recherche du taux de remise en service instantané	15
II.2.2.1 : Maintenabilité prévisionnelle	15
II.2.2.2 : Tests de maintenabilité	16
II-3 : Disponibilité	16
II.3.1 : Introduction	16
II.3.2 : Solution du système "permanent" pour $\lambda(i)=\lambda$ et $\mu(i) = i.\mu$	21
II.3.3 : Solution du système "permanent" pour $\lambda(i)=\lambda, \mu(i)=\begin{cases} i & \text{si } i \leq r \\ r & \text{si } i > r \end{cases}$	22

III - ETUDE DU PROCESSUS DE REPARATION ET OPTIMISATION

III-1 : Introduction	24
III-2 : Modèle à un atelier	24
III.2.1 : Généralités	24
III.2.1.1 : Coût de maintenance et variables de décision	25
III.2.1.2 : Disponibilité et variables de décision	26
III.2.2 : Hypothèses simplificatrices	29
III.2.2.2 : Etude du système approché S' précédemment défini bouclé avec le sous-système P.....	33
III.2.3 : Calcul de $v_{1i}(k)$, $v_{2i}(l)$, $v_{3i}(m)$	35
III.2.3.1 : Etude de $v_{1i}(k)$	35
III.2.3.2 : Calcul de $v_{2i}(k)$	36
III.2.3.3 : Calcul de $v_{3i}(0)$	37
III.2.4 : Taux de remise en service $\mu(i)$	38
III.2.5 : Disponibilité	40
III.2.6 : Application	42
III.2.7 : Recherche de μ_3	67
III.2.7.1 : Introduction	67
III.2.7.2 : Etude du modèle à point de commande unique $\langle Q, r \rangle$	67
III.2.7.3 : Etude du modèle $\langle Q=1, R \rangle$	80
III.2.7.4 : Etude du modèle $\langle Q, M \rangle$	83
III.2.7.5 : Remarque	92
III.2.8 : Expression des coûts de stockage pour les différents modèles	94
III.2.8.1 : Introduction	94
III.2.8.2 : Modèle $\langle Q, r \rangle$	94
III.2.8.3 : Modèle $\langle Q=1, R \rangle$	97
III.2.8.4 : Modèle $\langle Q, M \rangle$	99
III.2.9 : Optimisation	105
III.2.9.1 : Optimisation des stocks	107
III.2.9.2 : Optimisation de la maintenance	126

III-3 : Modèle à "b" ateliers identiques responsables d'une proportion $\frac{1}{b}$ du parc	133
III-4 : Modèle à "b" ateliers ayant des parcs différents ..	134
III-5 : Cas du matériel non électronique en régime stabilité	135
III-6 : Réflexions sur le choix du type de la contrainte ..	139

IV - APPLICATIONS NUMERIQUES

IV-1 : Premier exemple	141
IV.1.1 : Présentation des données	141
IV.1.2 : Politique des stocks	142
IV.1.3 : Politique globale	142
IV-2 : Deuxième exemple	143
IV-3 : Comparaison de la méthode proposée avec une méthode plus simple	144
IV-4 : Influence d'une imprécision sur les taux de mortalité	146

V - CONCLUSIONS

V-1 : Recueil et traitement de l'information	148
V-2 : Développement éventuel	149
V-3 : Epilogue	149

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	179
----------------------------	-----

V U :

Le Président de la Thèse

M. METIVIER

V U :

Le Directeur de Thèse

M. METIVIER

VU et APPROUVE

RENNES, le 3 Avril 1973

Le Directeur de l'U. E. R.
"Mathématiques et Informatique",

J. HOUEBINE,

VU et PERMIS D'IMPRIMER N° 115 C
RENNES, le 12 Avril 1973

Le Président de l'Université de RENNES,

C. CHAMPAUD.

